

Střední škola - Waldorfské lyceum
Křejpského 1501
Praha 4
tel. 272770378, lyceum@wspj.cz
Projekt „Další krok k adaptabilitě“
Registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/34355



Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Překlad metodické literatury

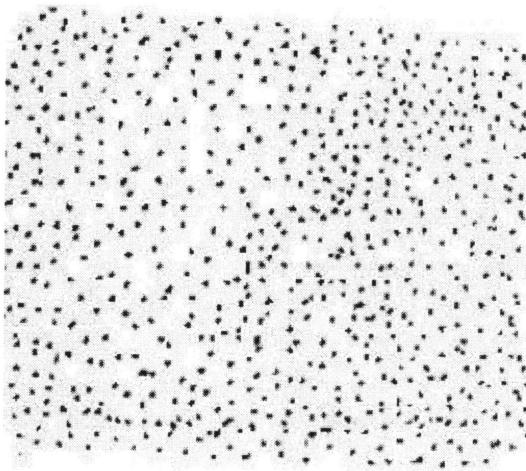
Karl - Friedrich Georg: Freie Geometrie ebener Kurven (Úvod do projektivní geometrie rovinných křivek)

Překlad: Radovan Daniel, David Dostal
Rozsah 17 NS
2014

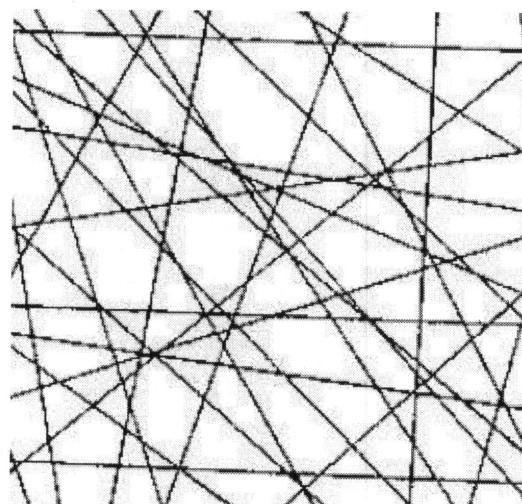
1. Projektivní rovina a její členění

Základními prvky v rovinné geometrii jsou bod a přímka. Rovina obsahuje nekonečně mnoho bodů a nekonečně mnoho přímek.

Zaměříme-li se pouze na body roviny, jeví se rovina jako bodové pole.



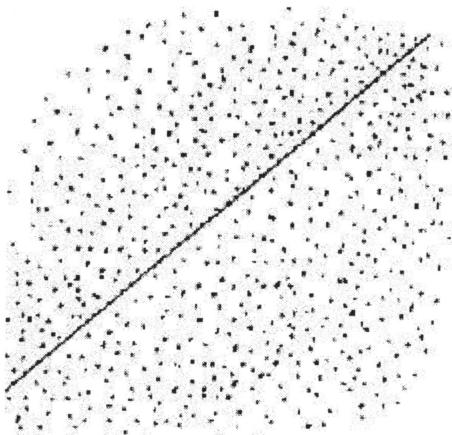
Zaměříme-li se pouze na přímky roviny, jeví se rovina jako přímkové pole.



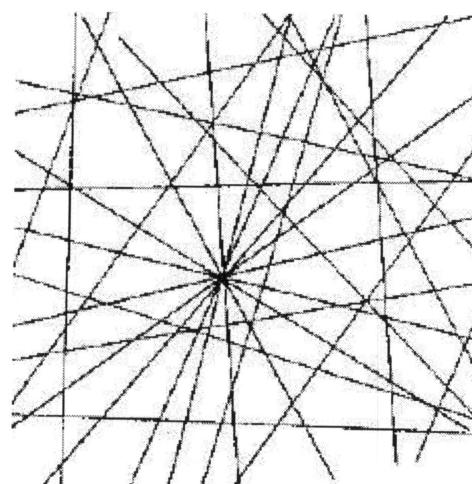
Chceme-li v rovině popsat rovinné útvary, musíme tyto dva jednostranné pohledy sjednotit.

Toho můžeme dosáhnout tím, že bud' přemístíme přímku do bodového pole, nebo bod do přímkového pole.

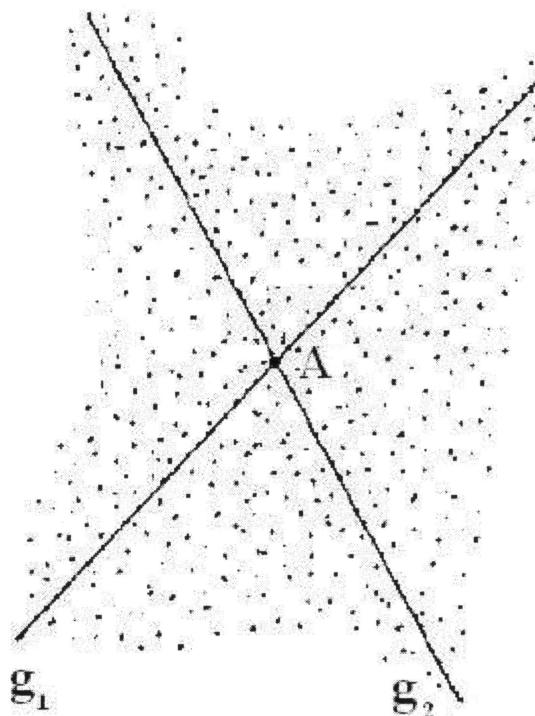
Přímka v bodovém poli je složena z nekonečně mnoha na ní ležících bodů.
Jeví se jako bodová řada.



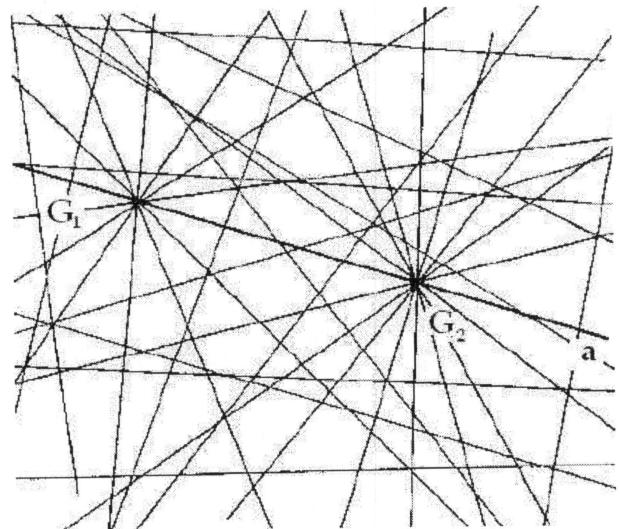
Bod v přímkovém poli vzniká jako průsečík nekonečně mnoha přímek, které jím procházejí.
Jeví se jako svazek přímek.



Dvě různé přímky (bodové řady) g_1 a g_2
v daném bodovém poli určují právě jeden
bod: průsečík A . ($g_1 \cap g_2 = A$)



Dva různé body (svazky přímek) G_1 a G_2
v daném přímkovém poli určují právě jednu
přímku: spojnici a . ($G_1 \cap G_2 = a$)

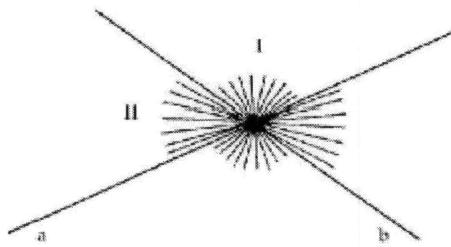


Předtím, než budeme zkoumat, jak jsou bodová a přímková pole několika prvky (body, popř.
přímkami) členěna, vyslovíme bez důkazu následující věty:

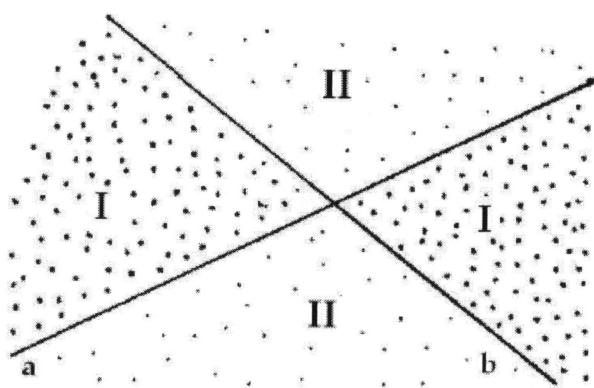
Věta 1A: Dva body A, B rozdělují spojnicu AB
jako bodovou řadu na dvě části: úseky I a II.



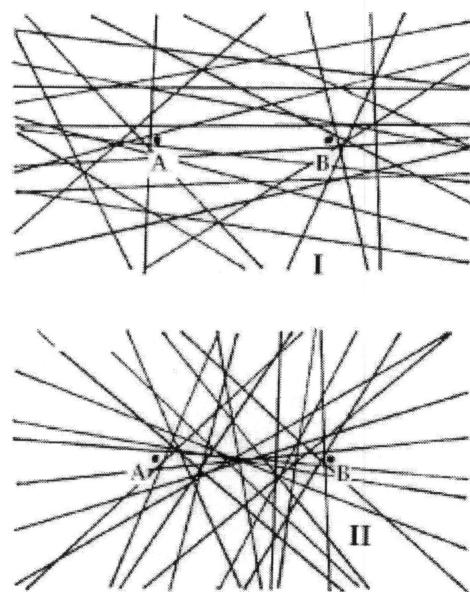
Věta 1a: Dvě přímky a, b dělí průsečík ab
jako svazek přímek na dvě části: úhly I a II.



Věta 2A: Dvě přímky a, b rozdělují rovinu jako bodové pole na dvě různé bodové oblasti I a II.

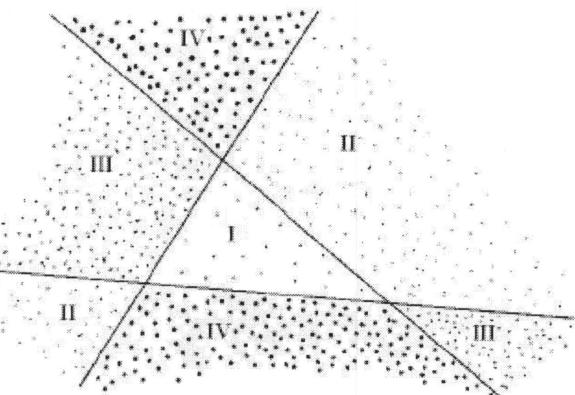


Věta 2a: Dva body A, B rozdělují rovinu jako přímkové pole na dvě různé přímkové oblasti I a II.

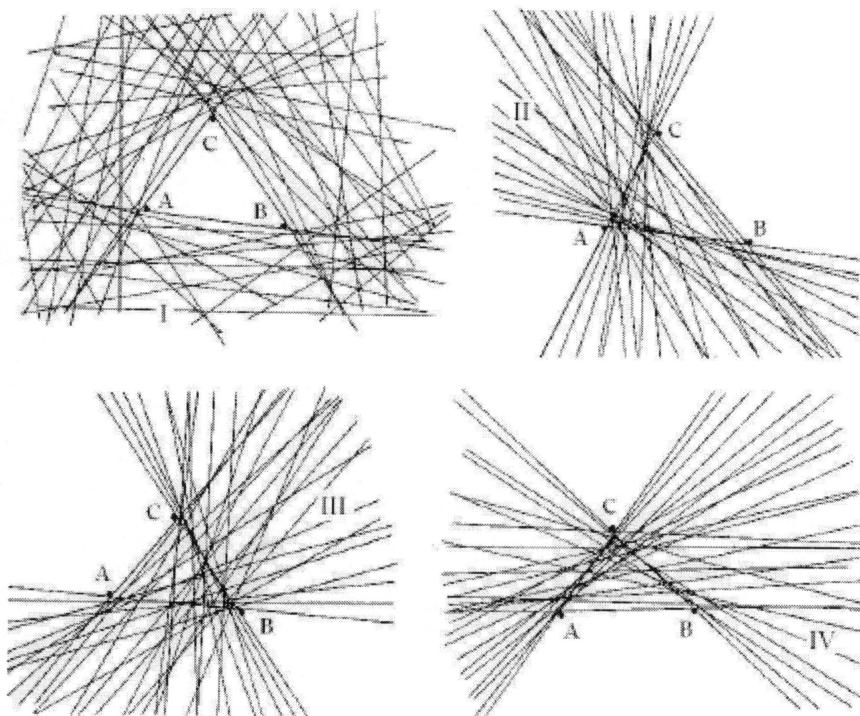


Členění roviny třemi prvky:

1. Přidáme-li třetí přímku (bodovou řadu), která nenáleží již danému svazku přímek do bodového pole, rozdělí tyto tři přímky (bodové řady) projektivní rovinu na čtyři třístranné oblasti.

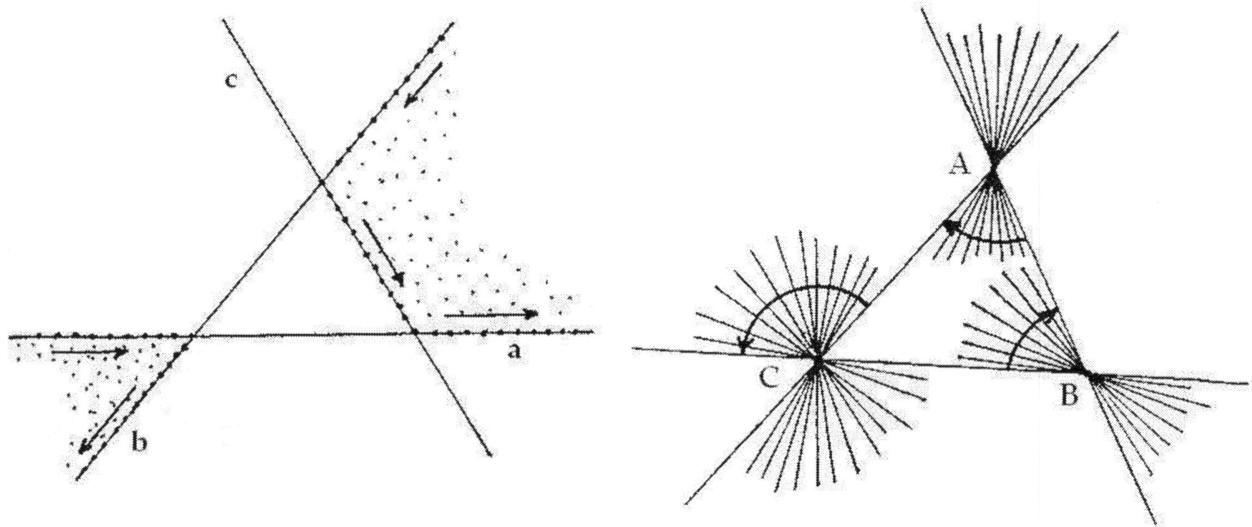


2. Přidáme-li do přímkového pole třetí bod, který nenáleží bodové řadě AB, je projektivní rovina rozdělena na čtyři tříúhlové oblasti.



Věta 3A: Tři různé přímky a, b, c (alespoň jedna z nich s ostatními netvoří svazek přímek) rozdělují rovinu jako bodové pole na čtyři třístranné oblasti.

Věta 3a: Tři různé body A, B, C (neležící na jedné přímce, bodové řadě) rozdělují rovinu jako přímkové pole na čtyři tříúhlové oblasti.

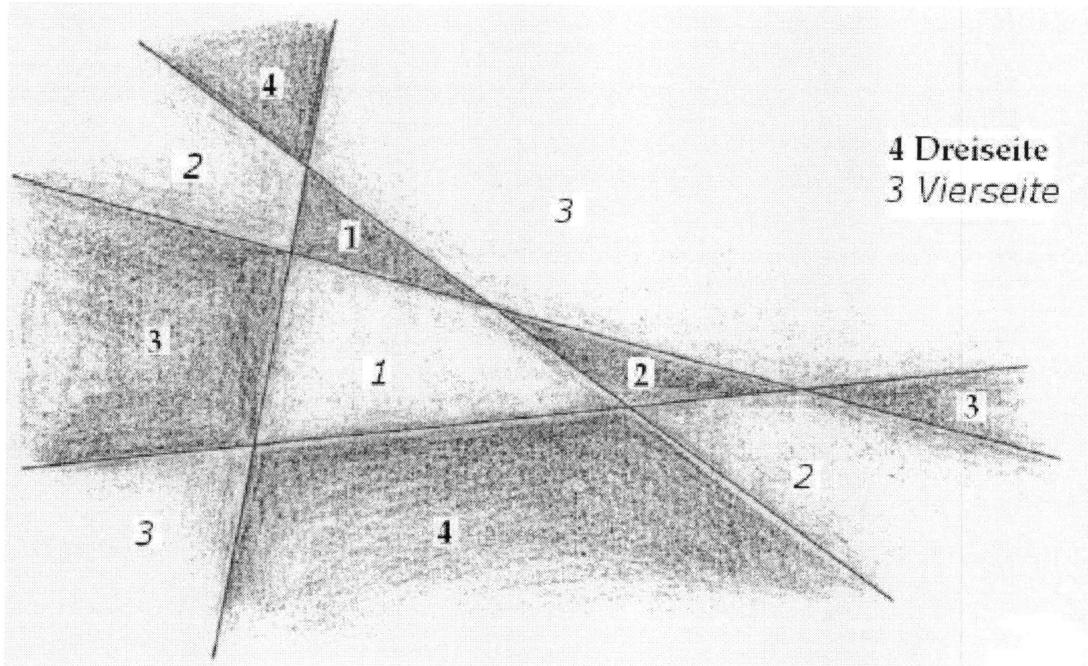


V projektivní geometrii protikladnost dvou základních prvků bodu a přímky označujeme jako dualitu.
V prostoru se zabýváme třemi základními prvky bodem, přímkou a rovinou. Zde máme protikladné prvky a útvary označené jako "polární".

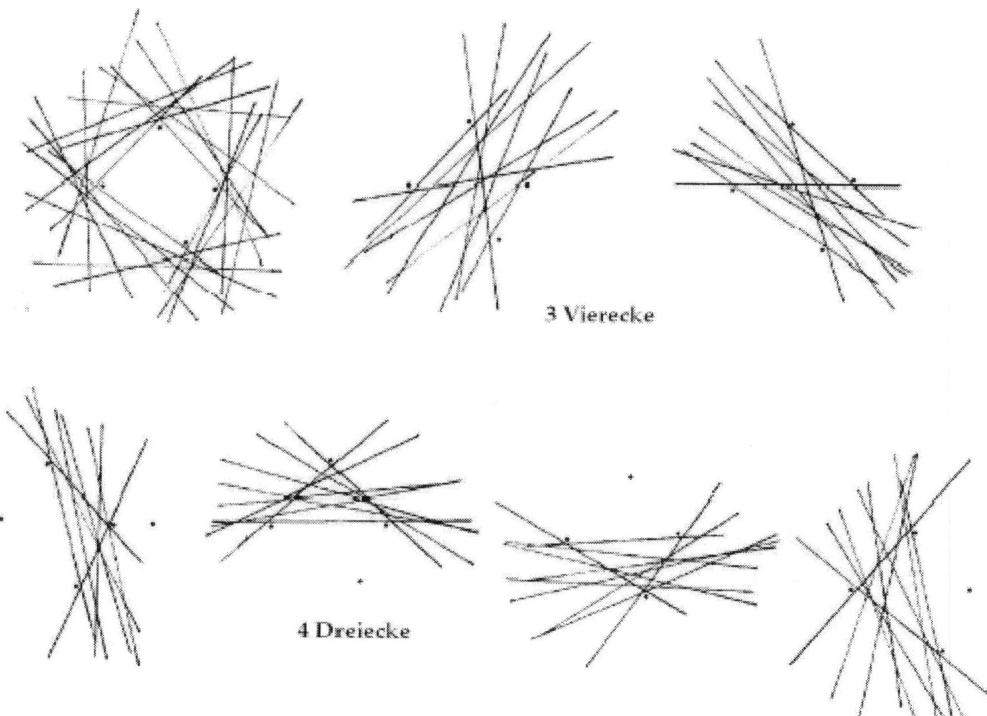
2. Cvičení

2.1 Členění roviny čtyřmi prvky

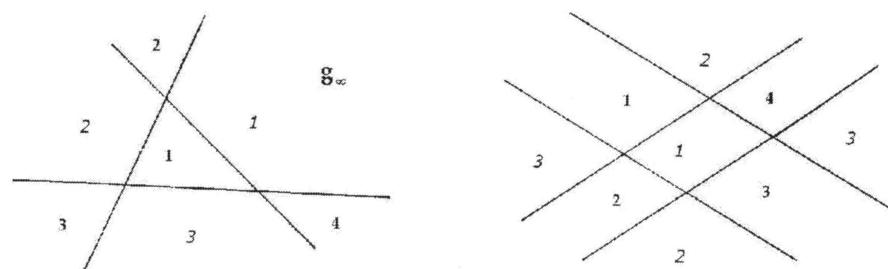
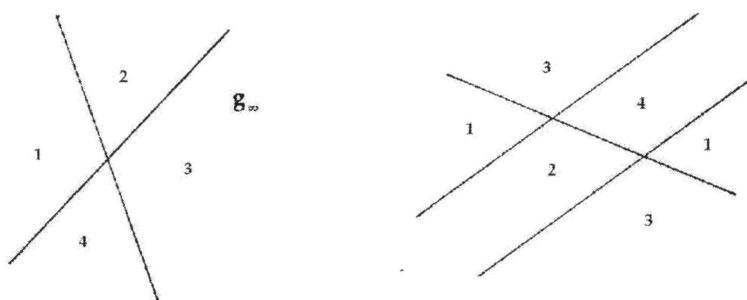
a) čtyřmi přímkami



b) čtyřmi body

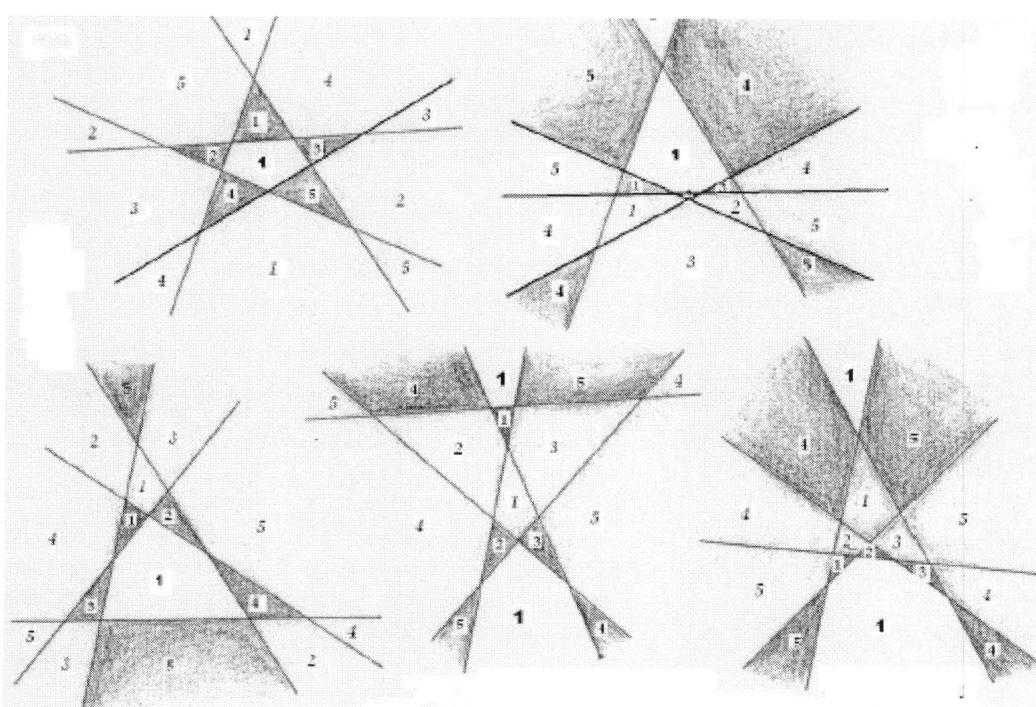


2.2 Členění roviny ve zvláštních případech (s nekonečně vzdálenými prvky)

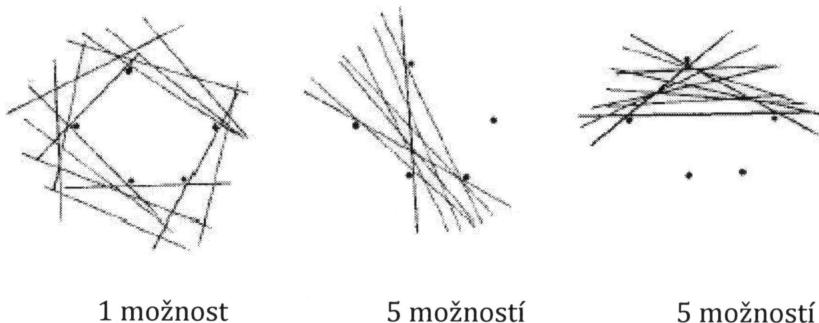


2.3 Členění roviny pěti prvky

a) pěti přímkami



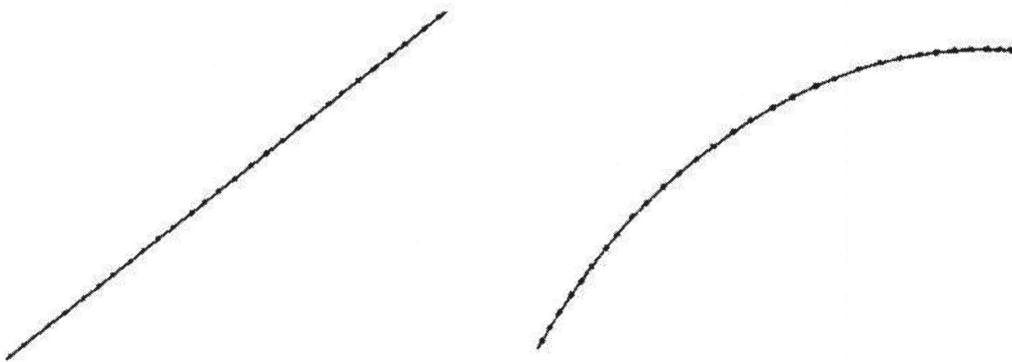
b) pěti body



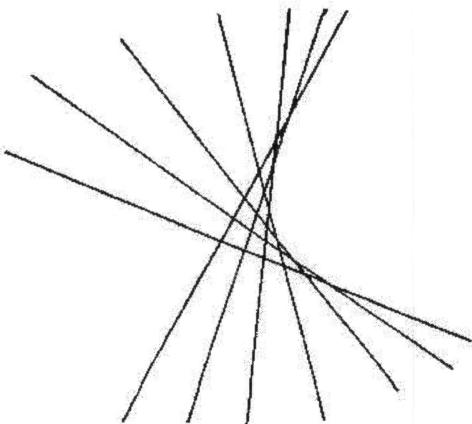
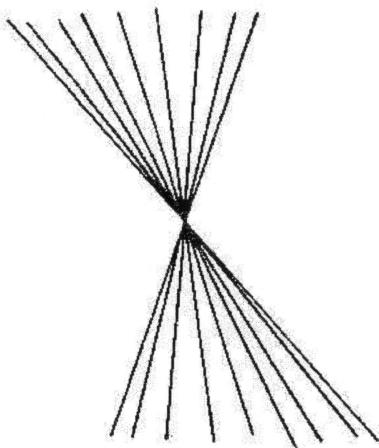
3. Oblouk

3.1 Úvod

Putujeme-li bodem po oblouku, vnímáme změnu dynamiky tohoto pohybu nejvíce v místech zakřivení oblouku. V extrému se oblouk může narovnat do přímky (nulové zakřivení) nebo zakřivit do bodu (nekonečné zakřivení). Putujeme-li po přímce, stává se náš pohyb posunutím. Putujeme-li po oblouku, posouváme se a otáčíme se u toho. Body oblouku udávají procházející místa, tečny měnící se směry.



Který proces je duální k tomuto „ohýbání“ v přímkovém poli? Abychom našli analogii k zakřivování, uvažujme nad tím, co oblouk odliše od přímky. Zjevně již neleží žádné tři body na jedné a té samé přímce. Tímto způsobem nyní musíme proměnit úhel tak, aby žádné tři přímky již neprocházely jedním bodem. Úhel je rozpuštěn do obálky oblouku: přímky obalují jako tečny jednoduchý oblouk.



Vidíme, že u těchto duálních procesů „ohýbání“ a „rozpuštění“ přicházíme k podobnému tvaru. Rozpuštěný úhel určuje jako obálka oblouk. Na každé přímce tohoto obálkového oblouku leží právě jeden bod oblouku.

Můžeme tedy pohlížet na oblouk jako na bodový i přímkový útvar, přičemž žádný způsob není lepší než ten druhý.

3.2 Členění projektivní roviny obloukem

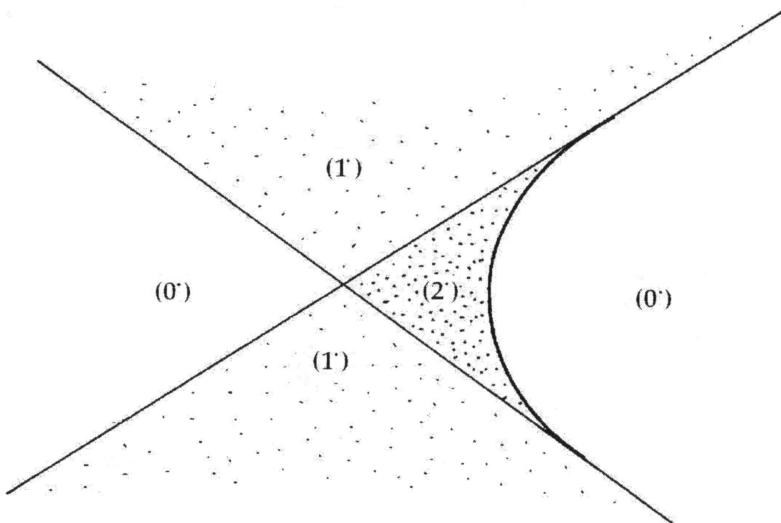
Pozorujeme-li oblouk, můžeme si všimnout, že v projektivní rovině existují body, kterými prochází přímka obálky (což je tečna k oblouku), a existují také body, kterými neprochází přímka žádná. Docházíme k tomu, že obloukem je bodové pole členěno na různé bodové oblasti.

Z každého bodu bodového pole lze vést k oblouku:

V oblasti $(2')$ právě dvě tečny,

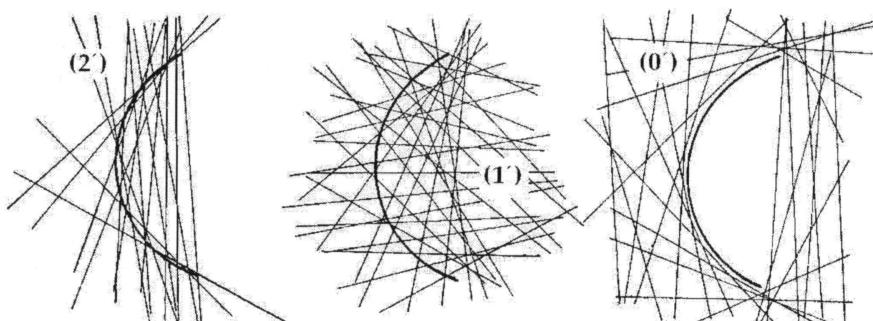
V oblasti $(1')$ právě jednu tečnu,

V oblasti $(0')$ žádnou tečnu.



Hranice oblastí (množiny bodů) jsou utvářeny koncovými tečnami.

Duálně je přímkové pole obloukem členěno na tři přímkové oblasti:



Oblast $(2')$ sestává ze všech přímek, které obloukem procházejí právě ve dvou bodech.

Oblast $(1')$ sestává ze všech přímek, které obloukem procházejí právě v jednom bodu.

Oblast $(0')$ sestává ze všech přímek, které obloukem neprocházejí.

Hranice oblastí jsou tvořeny koncovými oblastmi oblouku a obloukem jako množina přímek.

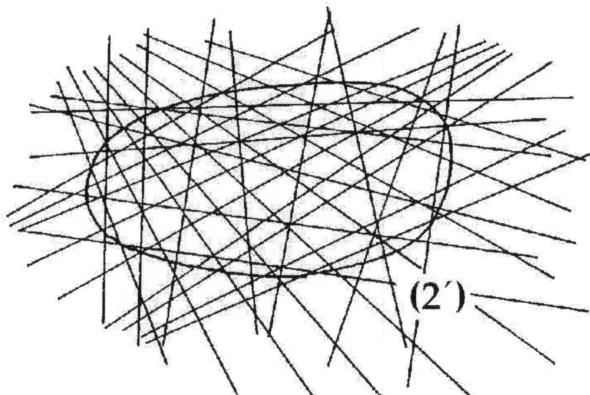
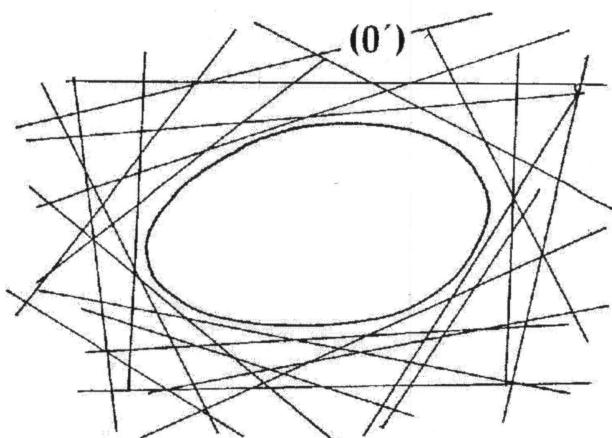
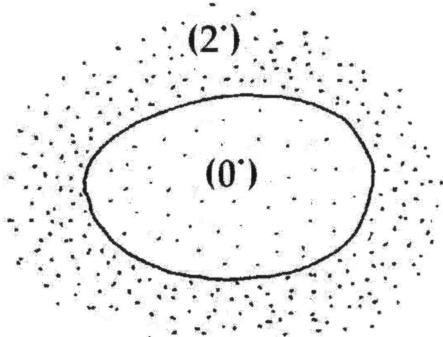
Podívejme se ještě na jiný oblouk, tento je uzavřený a nazývá se ovál.

Ovál rozděluje projektivní rovinu jako bodové pole na dvě oblasti:

$(0')$ = „uvnitř“ a $(2')$ = „z vnějšku“.

Přímkové pole rozděluje ovál také na dvě oblasti:

$(0')$ = „uvnitř“ a $(2')$ = „z vnějšku“.



4. Křivky¹

4.1 Předmluva

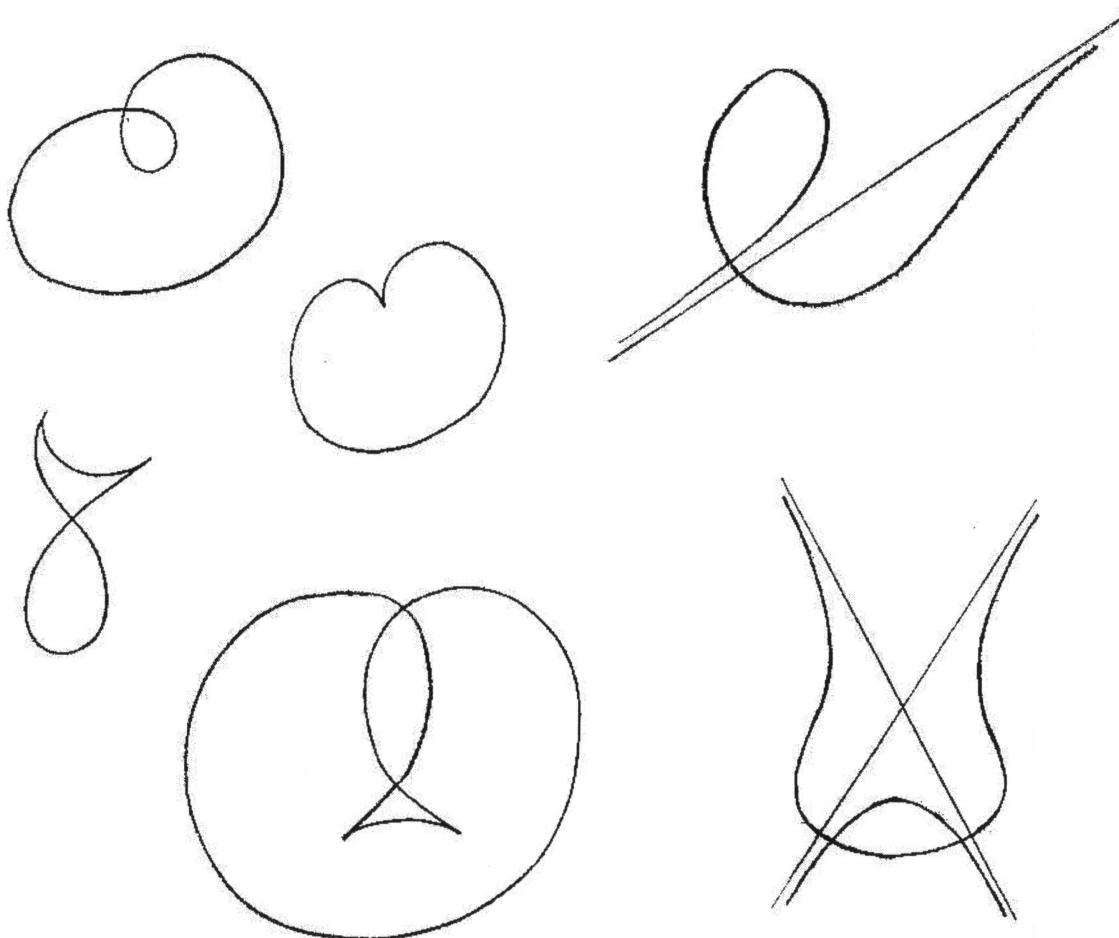
Pod křivkou se rozumí uzavřený, také se do sebe vracející oblouk (který také může být uzavřený přes nekonečno).

V předchozí kapitole jsme poznali jako jednoduchou křivku vejcovitý oblouk – ovál. Ten má s přímkami přímkového pole společné nanejvýše dva body a posílá body bodového pole nanejvýše dvě tečny. Známými příklady pro takovéto křivky jsou kuželosečky.

4.2 Singularity křivek

Křivka je množina bodů určité vlastnosti.² Tyto body jsou buďto ty, kterými je možno k dané křivce vést právě jednu tečnu – regulární body křivky. Ostatní body tvořící křivky nazýváme singulárními body – singularities.

Několik příkladů pro křivky se singularitami:³

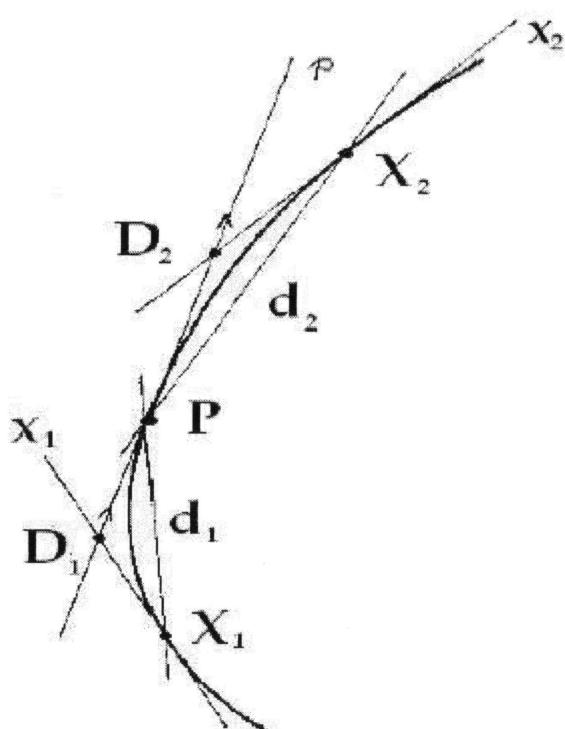


¹ Nezabýváme se zde velmi zajímavým tématem dualizace křivek, bude obsahem dalšího dílu.

² Toto vymezení pojmu křivka je matematicky nekorektní. V moderní diferenciální geometrii je pojem křivky zobecněn v souvislosti s pojmem variety.

³ Po prostudování této kapitoly určete u všech křivek typy singulárních bodů, které obsahují.

Podívejme se nyní na regulární a singulární body křivek detailněji.

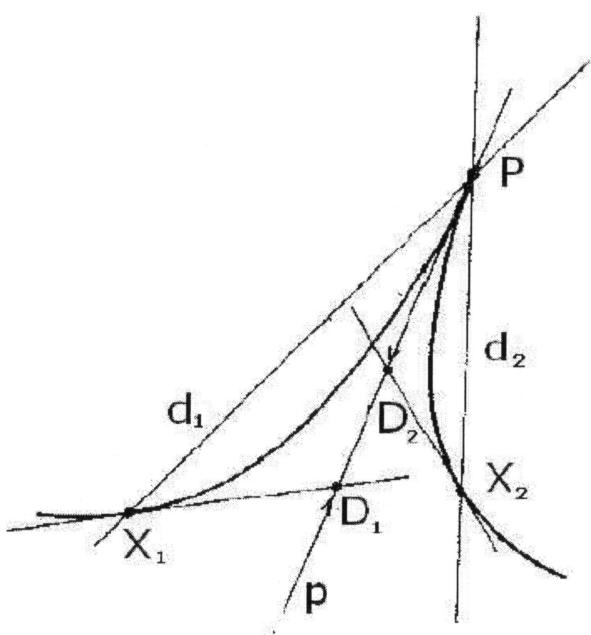


Po celé křivce budeme putovat a budeme si všímávat několika aspektů. Zaměříme se na bod P a na tečnu p , která je vedená k dané křivce v bodě P .

Kdybychom putovali z bodu X_1 do bodu X_2 a během cesty bychom si všímali směr otočení spojnic $d_i = X_iP$, zjistili bychom, že směr otočení se během celé cesty nezměnil.

Dále bychom se mohli zaměřit na tečny (x_i), které během cestování po křivce vedeme ke křivce z bodů X_i . Všechny tyto tečny protínají tečnu p v bodech D_i . Pozorujeme-li směr posunutí bodů D_i , vidíme, že se směr posunutí během celé cesty nezměnil.

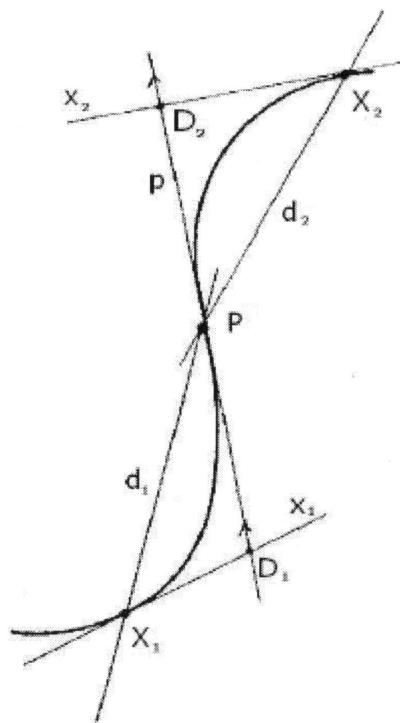
Můžeme tedy říct, že v bodě P s tečnou p se směr otočení a směr posunutí nezměnil. Bod P je proto regulárním bodem dané křivky.



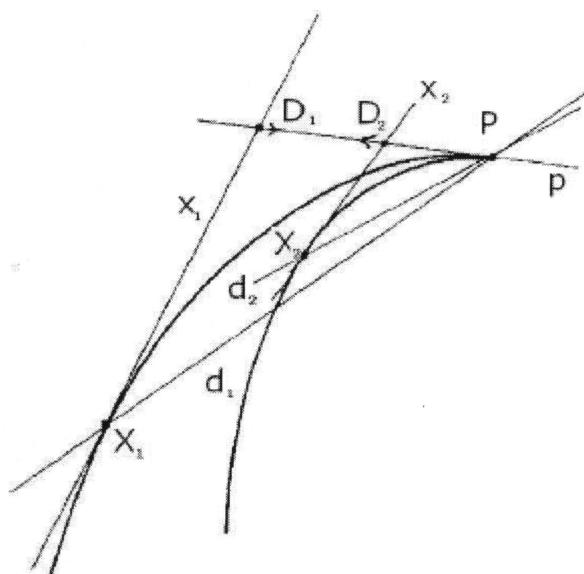
Nyní zkusíme putovat po křivce, která obsahuje bod P , který vidíte na obrázku vlevo.

Lehce můžeme pozorovat, že směr otočení se v bodě P nemění. Mění se ale směr posunutí. Bod P je zvláštním bodem dané křivky, je to singulární bod.

Singulární bod, ve kterém se mění směr posunutí a směr otočení je zachován, nazýváme trn. V odborné literatuře se můžeme setkat s pojmem bod vrátu.



Podívejme se na další zajímavý singulární bod. V tomto případě se při putování křivkou v bodě P mění směr otočení, směr posunutí je zachován. Za těchto okolností singulární bod P nazýváme místo obratu. V matematické analýze jej nazýváme inflexní bod.

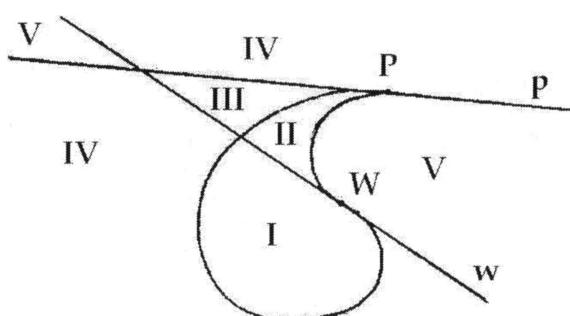
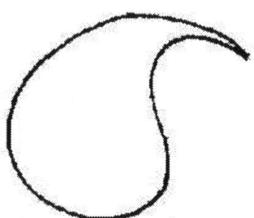


Velmi zajímavý je případ, kdy se v bodě P mění jak směr otočení, tak směr posunutí. Tento singulární bod pojmenujeme jako zobák.

4.3 Členění roviny křivkou

Úkol: Prozkoumejte danou křivku podle toho, jak rozčleňuje rovinu jako bodové a přímkové pole.

1. Příklad



a) členění roviny jako bodové pole (z bodového hlediska):

I: 1°

II: 3°

III: 5°

IV: 3°

V: 1°

Je to křivka 5. třídy.

b) Členění roviny jako přímkové pole (z přímkového hlediska):

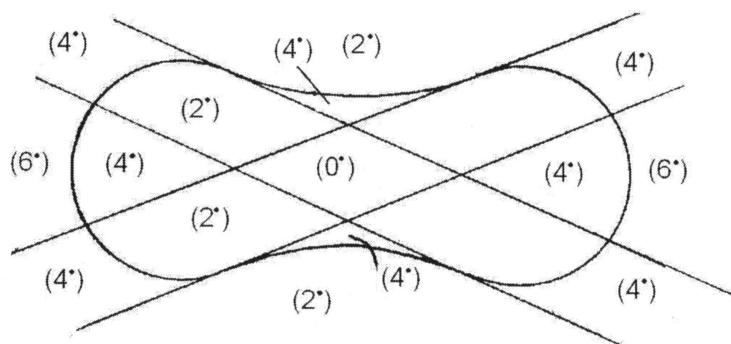
Existují následující oblasti: (0'), (2') a (4').

Je to křivka 4. řádu.

Naše křivka v příkladu je 4. řádu a 5. třídy.

2. Příklad

Tato křivka je 4. řádu a 6. třídy



3. Příklad

Tyto křivky jsou variantami křivky 4. řádu a 4. třídy

