

Geometrie ve čtvrté až páté třídě

Mgr. Pavel Kraemer, Ph.D.

Shrnutí a další rozvinutí přednášek z waldorfského semináře v Praze na Opatově 24.-26.září 2010

Začněme s krátkým vyprávěním, které se hodí na začátek epochy geometrie ve čtvrté nebo páté třídě.

„Byla jedna rodina a hlavou rodiny byl otec, který byl velmi harmonický, pořádný. Narodili se mu dva synové. Jeden syn byl po otci - velmi pořádný, věci dotahoval do konce, ale byl těžkopádný a neměl v sobě vnitřní lehkost. Druhý syn měl v sobě velkou pohyblivost. Byl však velmi nestálý a u ničeho dlouho nevydržel. Když synové rostli, proměňovali se. První syn, který měl sklony k pedantismu, zůstával na jednom místě, tloustl. Druhý syn, který byl nestálý a u ničeho nevydržel, tak zpychl, že chtěl jen ovládat a manipulovat jiné. Měl ještě třetího syna, ale ten se vůbec nevyvedl, a tak si o něm raději nebudeme vyprávět.“

Uvědomte si, že máme geometrii, probíráme čtyřúhelníky. O čem jsem Vám tedy právě vyprávěl? Kdo byl kdo?

Je třeba dát dětem dost času, aby mohli hádat. Neměli by ale vykřikovat, můžeme jim například říci: Každý, kdo už něco ví, zvedne ruku a na prstech ukáže, kolik obrazců už uhádl. Čekáme, až se většina ruk zvedne, a až potom dáme dětem slovo, aby říkaly své typy, se zdůvodněním. Je důležité umět čekat, abychom dali prostor na přemýšlení i těm pomalejším. Rychlí by se měli učit nevykřikovat, dávat prostor i ostatním. V zásadě je lepší nejdříve vyvolávat slabší žáky, až potom za účelem opravy nesprávných odpovědí a upřesnění argumentů, ty bystřejší.

Správná odpověď je:

Čtverec – otec

Obdélník – první syn – proměnil se na symetrický lichoběžník.

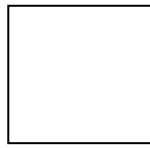
Kosočtverec – druhý syn – proměnil se v „draka“ (deltoid)

Rovnoběžník neboli kosodélník – třetí syn, který byl odnarození pokřivený

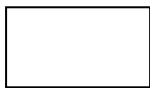
Tyto všechny obrazce jsou rodinou čtyřúhelníků. Maminka by byla asi kruhem. Až teď otevřeme tabuli, na kterou jsme si obrazce připravili už před hodinou.



Nyní můžeme k obrázcům napsat správná jména:



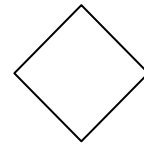
otec



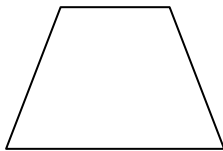
první syn



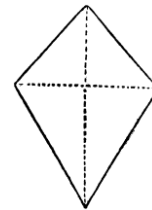
třetí syn



druhý syn



zestárlý první syn



zestárlý druhý syn

Takto bychom tedy mohli začít první den epochy geometrie ve čtvrté třídě. Jak bychom pokračovali? První den bychom ještě mohli zmínit pojem osy symetrie, které děti podvědomě již znají z prvních tříd z epoch kreslení volnou rukou. V prvních třídách se totiž často zadává určitá forma, a děti ji mají doplnit jejím zrcadlovým obrazem. Děti by měli umět najít všechny osy symetrie probraných čtyřúhelníků.

Čtverec má čtyři osy, projevuje se tu čtyřikrát zrcadlová symetrie, ostatní čtyřúhelníky jich mají méně, rovnoběžník nemá dokonce žádnou – zde děti dělají často chybu, myslí si, že rovnoběžník má také dvě osy symetrie. Oni totiž intuitivně cítí, že tu určitá symetrie je. Ve skutečnosti se jedná o tzv. středovou souměrnost, což je ovšem bohužel pro děti dosti zavádějící pojem – např. by člověk očekával, že u rovnoramenného trojúhelníku je středová souměrnost, ale opak je pravdou. Proto je lepší středovou souměrnost s dětmi v tomto věku vůbec neprobírat. Později je možné se zmínit o rotační symetrii, v níž je středová souměrnost již obsažena (jedná se o dvoučetnou osu otáčení)

- Trojčetná rotační symetrie – trojúhelník
- Čtyřčetná rotační symetrie – čtverec
- Dvoučetná rotační symetrie – rovnoběžník

Výraz „osa symetrie“ při výkladu používám, ale nevysvětluji, děti z kontextu pochopí, že jedná o něco, co už znají. Používání takovýchto vědeckých slovo mají děti v tomto věku velmi rády. V 5. třídě se děti s nadšením učí latinské názvy a nejnovější vědecké pojmy – už chtějí být velcí a znát řeč dospělých odborníků. Je třeba toto naladění využít, v pubertě vyprchá.

Čím je obrazec harmoničtější, tím má více os symetrie. Harmoničtější obrazce jsou na tabuli nahoře, méně harmonické dole. Tím bychom mohli skončit výklad. Nyní by si děti měli obrazce pěkně zakreslit do sešitu a udělat si zápis:

Rodina čtyřúhelníků

čtverec
 obdélník
 kosodélnice
 rovnoběžník
 lichoběžník
 obecný čtyřúhelník

V jednom konkrétním domě žil pan Chvostek, který měl velkou krásou a symetrií. Tehdy si nakládal na tom, že má čtyři osy symetrie. Zanedlouho se mu narodili dva synové - obdélník a kosodélnice. Ti už nebyli tak dokonalí jako jejich otec. Obdélník byl sice velmi pracovitý a přesný, nato byl poměrně neukázněný a příliš konkrétními - abstraktními - způsoby jedl. Do společnosti se rozhodl nechat. Bratr kosodélnice byl jeho práce opakem. Je velmi roztěkaný, byl prázdnou slávu a zájmem. Byl ovšem poměrně spouštěl a nešťastný. Tato bubla se naučím dobře doplňovali a nedá se říci, kdo z nich byl lepší či horší. Tato máti dvě osy symetrie.

O této pondělí se narodil třetí syn. Jmenoval se rovnoběžník, ale doma mu spíše říkali rovnoběžník nebo čtverec. Toť co říkali, si nemá ani jednu osu symetrie ho vyhodili z domu. Teď ale přestože je tak a podíváme se, co se stalo s ostatními bratry, když matka zemřela. Obdélník se od samého dětství na prázdnou občas, dost poměrně rozšířil a stal se z něho lichoběžník. Kosodélnice na tu dobu velmi vyrostl - na věky se držel svého. A vyrostl nemalou mu už říkával - stal se z něho deltooid. Protože oba bratři ještě máti jednu osu symetrie, doma je, byť neradi, přijali. Tato bratři už i tu zřehli, obě neformální bratry odvedli do domova duševní.

Kdo je pomalejší, obrazce si jen načrtne a pořádně je nakreslí doma. Za dobrovolný domácí úkol můžeme dětem zadat popřemýšlet o tom, jaké jsou ve čtyřúhelnících další zákonitosti. Upozorňuji zde, že Rudolf Steiner byl jednoznačně proti zadávání povinných domácích úkolů. Měl k tomu své důvody, které teď nebudeme podrobně rozebírat. Nicméně mnozí z Vás asi ví, že zvláště v matematice můžou povinné domácí úkoly vést k vnitřnímu zmatku dítěte – rodiče často vše vysvětlují úplně jinak – nebo dokonce k pocitům méněcennosti, vnitřním traumatům, nechuti k předmětu, která leckdy zůstane na celý život.

Další den se po úvodním krátkém zopakování názvů čtyřúhelníků a problematiky os symetrie můžeme vrátit k dobrovolnému domácímu úkolu. Kdo našel nějaké vlastnosti? Kdo našel jiné? Je třeba děti, především ty slabší, často chválit i za malý úspěch při objevování. Nakonec se dostaneme k systematickému výčtu vlastností.

Vše můžeme shrnout v následující tabulce:

VLASTNOSTI ČTYŘÚHELNÍKŮ: (osy symetrie je lepší nekreslit, aby si je děti musely představovat)

	<p>ČTVEREC:</p> <ul style="list-style-type: none"> -- všechny úhly stejné -- všechny strany stejné -- protilehlé strany jsou rovnoběžné -- 4 osy souměrnosti <p>= celkem 4 vlastnosti</p>	
<p>OBDELNÍK</p> <ul style="list-style-type: none"> -- všechny úhly stejné -- protilehlé strany jsou stejné (1/2) -- protilehlé strany rovnoběžné -- 2 osy souměrnosti (1/2) <p>= celkem 3 vlastnosti</p>	<p>ROVNOBĚŽNÍK</p> <ul style="list-style-type: none"> --protilehlé strany jsou stejné (1/2) --protilehlé úhly jsou stejné(1/2) --protilehlé strany rovnoběžné <p>= celkem 2 vlastnosti</p>	<p>KOSOČTVEREC</p> <ul style="list-style-type: none"> -- všechny strany stejné -- protilehlé úhly jsou stejné(1/2) -- protilehlé úhly jsou „rovnoběžné“ -- 2 osy souměrnosti (1/2) <p>= celkem 3 vlastnosti</p>
<p>SYMETRICKÝ LICHOBĚŽNÍK</p> <ul style="list-style-type: none"> -- jen dvě strany jsou stejné (1/4) -- vedlejší úhly jsou stejné (1/2) -- rovnoběžné jsou jen dvě strany (1/2) -- 1 osa souměrnosti (1/4) <p>= celkem 1,5 vlastnosti</p>		<p>DELTOID</p> <ul style="list-style-type: none"> -- jen dva úhly jsou stejné (1/4) -- vedlejší strany jsou stejné (1/2) -- jen dva úhly jsou „rovnoběžné“ (1/2) -- 1 osa souměrnosti (1/4) <p>= celkem 1,5 vlastnosti</p>

Z důvodů exaktnosti zde používám pojem poloviční vlastnosti - např. vlastnost obdélníka, že protilehlé strany jsou stejné, je „polovinou“ vlastnosti čtverce, že všechny strany jsou stejné. S dětmi ve 4.třídě to samozřejmě spíše budeme dělat na celá čísla, k čemuž, aby pěkně vyšel níže zmíněný základní princip, je třeba přibrat i vlastnosti úhlopříček, které bychom ale spíše odložily na třetí den epochy. (viz níže)

Ukazuje se, že čím je obrazec symetričtější, tím má víc vnitřních zákonitostí. Čtverec je tedy z hlediska zákonitostí, tedy myšlenek či pojmů, nejbohatším, nejobsažnějším čtyřúhelníkem. A proto stojí na začátku, na vrcholu. Další, méně pravidelné čtyřúhelníky vznikají ubíráním určitých vlastností, jsou myšlenkově chudší. Ve waldorfské pedagogice postupujeme od celku k částem, což v duchovním smyslu znamená od harmoničtějších, myšlenkově bohatších útvarů k méně harmonickým, myšlenkově chudším. Tento druh analýzy by měl převládat minimálně do doby puberty. V pubertě začíná nabývat na významu syntetická metoda, kde rodící se samostatný úsudek začíná svou svobodnou vůli spojovat pojmy a tím si vytvářet vlastní, individuální myšlenkový svět.

Tím končí výklad, děti by si vlastnosti měli pěkně a přehledně zapsat do sešitu. Měli by si ale také nechat místo na další vlastnosti, související s úhlopříčkami, které se budou probírat další den. Jako domácí úkol je možné, po krátkém vysvětlení pojmu úhlopříčka, zadat dobrovolný domácí úkol: Jaké nové zákonitosti lze u jednotlivých čtyřúhelníků objevit v souvislosti s úhlopříčkami?

Třetí den se můžeme po úvodním opakování ještě hlouběji podívat na již dříve nalezené zákonitosti: Je možné si např. všimnout, že ke každé vlastnosti obdélníka je možné najít „podobnou“ vlastnost kosočtverce. Obdélník má všechny úhly stejné, a kosočtverec má všechny strany stejné. Protilehlé strany u obdélníku jsou stejné, u kosočtverce jsou stejné protilehlé úhly. Podobně je tomu i u dvojice symetrický lichoběžník – deltoid. To, co platí u jednoho obrazce pro úhly, platí u druhého pro strany a naopak. Dotýkáme se zde tzv. principu duality, který hraje rozhodující roli v projektivní geometrii. Ačkoli se projektivní geometrie probírá až v 11.třídě, je dobré a nesmírně motivující něco z ní letmo

zmínit mnohem dříve, a pak dětem říci: „A více se o této záhadě dozvíte, až budete v jedenácté třídě probírat projektivní geometrii.“

Děti po takovéto větě získají pocit, že zdaleka ne všechno už znají, mnohé zajímavé věci, které teď ještě nejsou schopny pochopit, je čekají v daleké budoucnosti. Je zajímavé, jak dobře si některé děti tato učitelova slova pamatují. Na začátku jedenácté třídy přijdou k jejich učiteli matematiky a zeptají se: „Kdy budeme probírat projektivní geometrii?“ Kdyby se pak projektivní geometrie neprobírala, bylo by to pro děti velkým zklamáním.

Poznámka - Čtverec je duální sám k sobě, totéž platí o rovnoběžníku. Proto byly ostatně na tabuli zakresleny uprostřed, nejsou ani vlevo, ani vpravo.

Po objevení principu duality - který by ale měl být zmíněn skutečně jen letmo, měl by být jen nakousnut, aby v dětech mohl dál vnitřně žít - můžeme přejít k domácímu úkolu – kdo našel jaké zákonitosti spojené s úhlopříčkami? Je možné najít tyto vlastnosti:

<p>OBDÉLNÍK:</p> <ul style="list-style-type: none"> -úhlopříčky stejně dlouhé - navzájem se půlí 	<p>ČTVEREC:</p> <ul style="list-style-type: none"> -úhlopříčky stejně dlouhé -navzájem se půlí -jsou na sebe kolmé
<p>ROVNOBĚŽNÍK:</p> <ul style="list-style-type: none"> - navzájem se půlí 	<p>KOSKOČTVEREC:</p> <ul style="list-style-type: none"> - jsou na sebe kolmé - navzájem se půlí
<p>SYMETRICKÝ LICHOBĚŽNÍK:</p> <ul style="list-style-type: none"> -úhlopříčky jsou stejně dlouhé - půlí se ve stejném poměru 	<p>DELTOID:</p> <ul style="list-style-type: none"> - úhlopříčky jsou kolmé -půlí se jenom jedna

Zase vidíme: Čím symetričtější obrazec, tím více vlastností. Děti si udělají zápis do sešitu:

Vlastnosti čtyřúhelníků

Obdélník

- 2 osy symetrie
- všechny úhly jsou rovné
- protější strany jsou rovnoběžné
- všechny strany jsou stejně dlouhé
- úhlopříčky jsou stejně dlouhé
- úhlopříčky jsou na sebe kolmé
- úhlopříčky se navzájem půlí

Čtverec

- 4 osy symetrie
- všechny úhly jsou rovné
- protější strany jsou rovnoběžné
- všechny strany jsou stejně dlouhé
- úhlopříčky jsou stejně dlouhé
- úhlopříčky jsou na sebe kolmé
- úhlopříčky se navzájem půlí

Rovnoběžník

- 1 osa symetrie
- sousední úhly jsou stejné veliké
- protější strany jsou rovnoběžné
- všechny strany jsou stejně dlouhé
- úhlopříčky jsou stejně dlouhé

Lichoběžník

- 1 osa symetrie
- sousední úhly jsou stejné veliké
- protější strany jsou rovnoběžné
- všechny strany jsou stejně dlouhé

Deltoid

- 1 osa symetrie
- sousední strany jsou stejně dlouhé
- protější úhly jsou stejné veliké
- úhlopříčky jsou na sebe kolmé
- jedna úhlopříčka je půlína

Čtverc

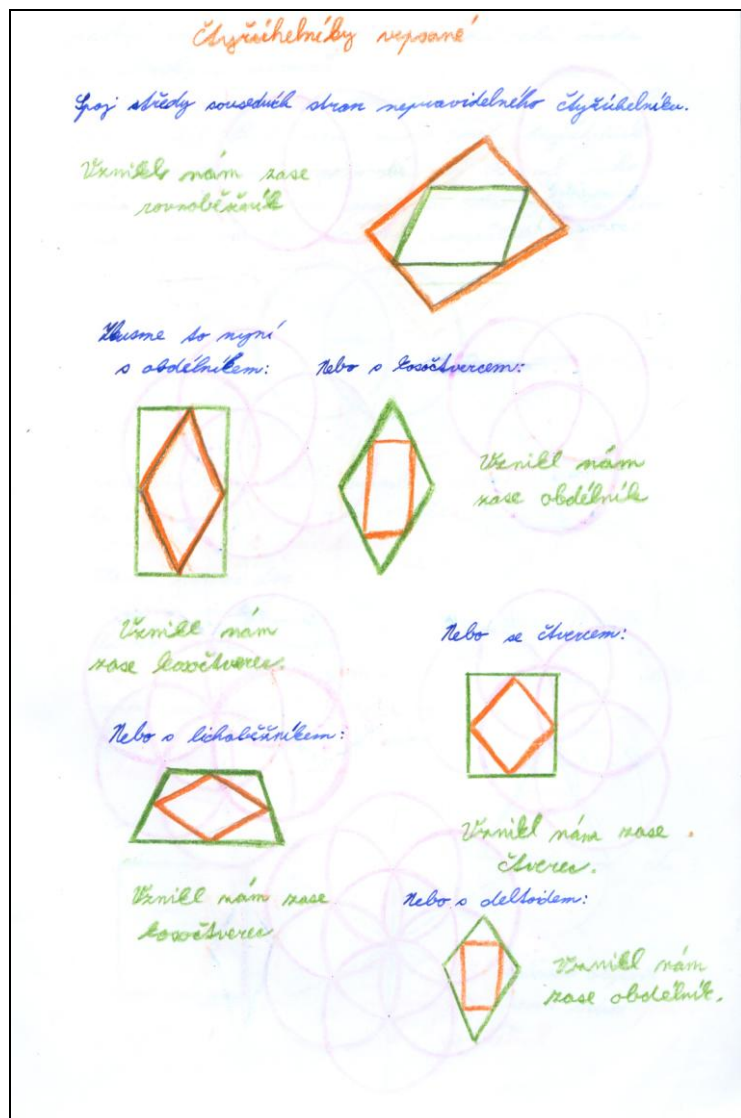
- 2 osy symetrie
- všechny strany jsou stejně dlouhé
- všechny úhly jsou rovné
- všechny strany jsou stejně dlouhé
- všechny strany jsou stejně dlouhé
- všechny strany jsou stejně dlouhé

Za domácí úkol je možné například zadat následující otázky:

Kterým útvarům se dá opsat nebo vepsat kružnice (aby se jí dotýkaly všechny vrcholy)? Co vznikne za obrazec, když u toho stávajícího spojíš středy stěn?

Následující, čtvrtý den, po krátkém opakování, se můžeme dostat k domácímu úkolu o kružnicích. Nemusíme na to zvlášť upozorňovat, ale některé děti si asi sami od sebe všimnou, že pokud nějakému útvaru je možné vepsat kružnici, je pak možné útvaru duálnímu (jeho „bratru“) kružnici opsat a naopak. Druhý domácí úkol je ještě zajímavější, objevuje se v něm totiž něco neočekávaného – všichni se sice asi rychle shodnou na tom, co vznikne vepsáním čtyřúhelníka do obdélníka (kosočtverec) a vepsáním čtyřúhelníka do kosočtverce (obdélník), ale mnozí, především ti, co jen přemýšleli, a nezkusili si to nakreslit, budou tvrdit, že vepsáním čtyřúhelníka do symetrického lichoběžníka vznikne deltoid a naopak. Chyba lávky! Nevznikne útvar přímo duální, ale útvar duální k útvaru o jeden stupeň dokonalosti výš posazenému. Z lichoběžníka vznikne kosočtverec, a z deltoidu obdélník. Zde analogie selhává, i když naštěstí jen napůl, určitá logika v tom je, když se člověk nad tím hlouběji zamyslí.

Zde je výborná příležitost „načapat“ i ty nejinteligentnější na chybě a naopak ukázat, že i dítě, považované za „hloupější“, ale zato je pilnější, a obrázek si poctivě a přesně nakreslilo, může někdy předčit ty, kteří jsou tradičně považováni za inteligentnější. To má pro třídu velký sociální význam.



Zápis by mohl vypadat asi takto:

Pátý den je možné vše zopakovat, ale obráceně. Můžeme se např. ptát:

Všechny úhly jsou stejné a páry protilehlých stran jsou také stejné. Jaký obrazec mám na mysli?

Všechny strany jsou stejné a protilehlé úhly jsou stejné. Jaký obrazec mám na mysli?

Úhlopříčky jsou na sebe kolmé a půlí se, ale nejsou stejně dlouhé. Jaký obrazec mám na mysli?

A tak je možné pokračovat dál. Zde musíme myšlení obrátit, musíme jakoby myslet proti proudu, musíme být vnitřně aktivnější ve své představivosti.

A pak můžeme napsat jakousi „písemku“. Ale zařídit to tak, aby většina dětí, pokud možno všichni, co se skutečně snažili, měli dobrý výsledek. Bodování ani známkování nedoporučuji, úlohy by měly být nejen uzavřeného (nakresli deltoid a do něho vepiš čtyřúhelník, který spojuje středy stran. Co vznikne?), ale i otevřeného typu: „Napiš co nejvíce vlastností kosočtverce!“

Děti v této době chtějí soutěžit, chtějí psát „písemky“. Ale měli bychom být v těchto věcech co nejcitlivější! Nemělo by se stát, že některé dítě bude mít opakovaný pocit velkého neúspěchu, bude vždycky horší než ostatní, nebude dělat pokrok. Leží na nás velká zodpovědnost.

Na konci týdne můžeme takovouto „minipochu“ (která může být součástí větší epochy geometrie nebo může například ve čtvrté třídě plynule navazovat na dvoutýdenní kreslení forem) uzavřít následující hádankou, na kterou bude dána oficiální odpověď až v sedmé třídě při probírání perspektivy: „Pluji prostorem ve světě čtyřúhelníků, vidím obdélníky, kosočtverce, lichoběžníky, úplně nepravidelné čtyřúhelníky... Ale pokaždé, když se ke čtyřúhelníku přiblížím, se mi na okamžik zdá, jakoby to byl čtverec. Jak je to možné?“

Možná na to ale některé dítě přijde už před sedmou třídou...

Tím jemně naznačujeme, že z určitého úhlu pohledu jsou všechny čtyřúhelníky vlastně čtverce. Vycházeli jsme z velké jednoty, nejvyšší symetrie a dokonalosti (čtverec), spouštíme se stále hlouběji a hlouběji k stále méně harmonickým útvarům, až nakonec vše ozáří světlo ducha a původní dokonalost se navrátí...

Řečeno prozaičtěji: Od původního celostního, rozumově nediferencovaného obrazu světa (rané dětství) se analýzou dostáváme k rozumově utříděnému diferencovanému pohledu na svět (střed dětství) a pak se novou syntézou zase vracíme k celostnímu pohledu, kde jsou detaily propojeny nosnou ideou nebo dokonce ideálem (puberta).

Pokud se síly analýzy dostatečně nevyžijí před pubertou, tyto síly neoprávněně převažují v pubertě působí destruktivně. Doby puberty by neměla být zahlcena intelektuálními rozbory, místo nich by se měly probírat celostní věci, více vycházející z citu a tvůrčího myšlení. Na to se často zapomíná.

Nakonec ještě pár poznámek k celkové struktuře výuky geometrie na waldorfské škole:

Rudolf Steiner postupně v konferencích první waldorfské školy odpovídal na dotazy učitelů vycházejících z jejich praxe, nevymyslel učební plán waldorfské školy, v přednáškách vysvětlil pouze základní principy. Na konferencích pak uváděl některé další příklady, které většinou nerozváděl dále do podrobností.

Na konferencích odpovídal na otázky učitelů, kteří již něco ve třídě udělali, proto Steiner ve svých doporučeních často reagoval na chybnou výuku učitelů, navrhoval, jak situaci ve třídě zkorigovat, jak nesprávný směr postupně proměnit na správný. Z těchto kusých Steinerových komentářů a návrhů někteří učitelé vytvořili pevný, někdy až zkostnatělý učební plán waldorfské školy. V Německu takto

postupně vznikl všeobecně rozšířený standardní učební plán - tradicí. V devadesátých letech nicméně začalo velké hnutí obnovy, mnohá stará dogmata začala být zpochybňována, více učitelů začalo hledat vlastní cestu.

S tímto vědomým je třeba číst existující učební plány waldorfské školy – ať už se jedná o plán Richtera nebo nějaký jiný. Steinerovy výroky a delší komentáře k výuce na waldorfské škole jsou shromážděny v Stockmeyerově knize. Část věnovaná matematice již byla přeložena do češtiny, bude možné si ji stáhnout na webu semináře.

Základní princip je waldorfské pedagogiky v době základní školy je, že se výhradně vychází z potřeb a vnitřního naladění dítěte. Je zajímavé, že pro Steinera byl i ten pro nás úplně samozřejmý fakt, že i ve waldorfské škole už v 1.-2.třídě učíme děti číst a psát, trochu bolestným kompromisem s vnější společenskou realitou moderní doby. V ideálním případě by Rudolf Steiner tyto věci učil až po dosažení dvanácti let, dle něj má raná gramotnost vliv na ztuhnutí vnitřního života dítěte. Speciální waldorfská metodika učení čtení a psaní má za cíl zjemnit dopady tohoto kompromisu. Je zajímavé, že například Jacob Steiner – zakladatel projektivní geometrie a pro mnohé největší geometr novověku – neuměl číst a psát do svých 14 let. Více se o něm můžete dočíst na <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Steiner.html> nebo <http://www.answers.com/topic/jakob-steiner>.

Podle Rudolfa Steinera se celá školní docházka dělí na tři části, které jsou odděleny tzv. rubikony. První rubikon bývá zpravidla kolem devátého roku, tedy během třetí třídy, druhý rubikon kolem dvanáctého roku, tedy během šesté třídy.

Výuka geometrie v 1 -3. třídě

V tomto období dominuje VŮLE

Zde je důležité, co děti dělají, jejich konání.

- Ještě tu doznívá schopnost nápodoby (vysoká zodpovědnost učitele!)

- při kreslení forem se děti učí formám, které vytvářejí zejména osově symetricky – ale to se děje ještě bez pojmů! Žáci nic nedokazují a nepřemýšlejí o tom. Pracují a na základě práce se prakticky, ne zcela vědomě, učí geometrickým pojmům - např. symetrii.

Steiner se poměrně podrobně věnoval výuce forem, mnohé je možné vyčíst přímo z metodicko-didaktického kurzu, který se konal těsně před založením první waldorfské školy, a který je u nás volně k prodeji.

Schopnost geometrie je ještě silně vázána na tělo a je od něj neoddelitelná (proto když žáci dělají matematiku, tak se jim vnitřně chce běhat a skákat – síly vnitřního myšlení přechází do fyzického těla).

Celý smysl školy je zvnitřnit tento pohyb a přeměnit ho na schopnost vnitřní pohyblivosti, představivosti.

Výuka geometrie v 4. -5. třídě

V tomto období dominuje CIT

- „střed dětství“, děti jsou nejméně unavené a dokážou se nejlépe naučit (potom už to je těžší)

- protože cit, jako složka lidské činnosti, nelze unavit, jsou děti neunavitelné a jako učitelé je můžeme hodně namáhat. Paměť souvisí s citem. Děti nejlépe citově založené mají schopnost si i hodně zapamatovat.

- v této době si již může učitel dovolit je více zatížit.

- žáci se chtějí co nejlépe učit. Chtějí se učit terminologii a učitel by jim toto měl dát. S tím souvisí i výrok R. Steinera, že jazyky by se měli naučit do 6. třídy, protože do té doby mají schopnost se naučit co nejlépe sloviček, dále se tato schopnost již ztrácí.

- v tomto období se začíná oddělovat pohyb a vnitřní představivost (např. kolmice k horizontální či vertikální přímkou umí dítě v 1. třídě nakreslit – avšak až žák 3. třídy si umí ve své představě pohnout touto přímkou do jistého úhlu a pak na ní dodělat kolmici). Někteří lidé dokonce setrvávají na úrovni tohoto prvního období – neumí oddělit pohyb od představivosti. Toto je nutno léčit speciální pedagogikou. Díky tomu, že tu funguje „duch třídy“, ty děti, které ještě úplně nedozrály, přenesou i přes věci, které by pro ně samotné byly ještě příliš těžké...

- v tomto období ještě žáci nezvládají samostatné tvořivé logické myšlení v postupných krocích. To neznamená, že by nebyli schopni toto myšlení vnějškově napodobit!

O geometrii v 4. a 5. třídě toho Steiner mnoho neřekl – zmínil pouze, že by děti měli popisovat a porovnávat různé geometrické obrazce. Jaké konkrétně? To je na nás.

- Je tedy dobré probírat různé geometrické „říše“ – např. říši čtyřúhelníků – zde podobně jako v nauce o zvířatech jednotlivé věci porovnáváme a charakterizujeme, pracujeme tedy s myšlením prochnutým citem (viz níže). Jiná možnost by byl například svět mnohobokých hvězd, zde je pěkná souvislost s aritmetikou.

4. třída

Rodinu čtyřúhelníků by bylo ideální probrat ve 4. třídě

Mělo by se to samozřejmě malovat ještě volnou rukou! Nikoliv rýsovat – to silně potlačuje síly představivosti.

Dobře si něco umíme představit právě proto, že si to vnitřně nakreslíme. Zde bychom měli plynule navázat na kreslení forem.

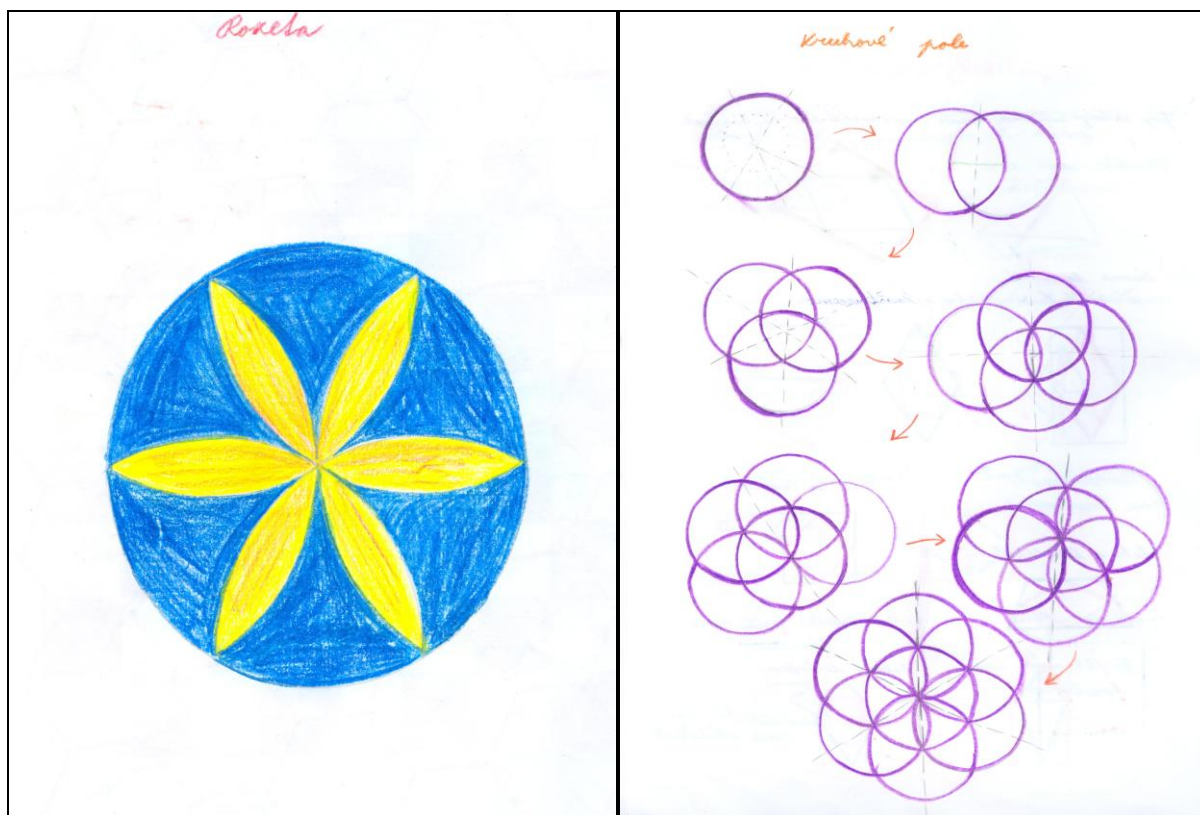
Je dobré, se skutečnou geometrií začít už od 4. třídy, abychom se v šesté třídě mohli dostat k čistě logickým důkazům.

5. třída

Kreslení pravítkem a kružítkem a již ne volnou rukou. To je radikální přechod – naprosto přesné rýsování.

Základ všeho rýsování je KRUH, je dobré vycházet z kruhového pole.

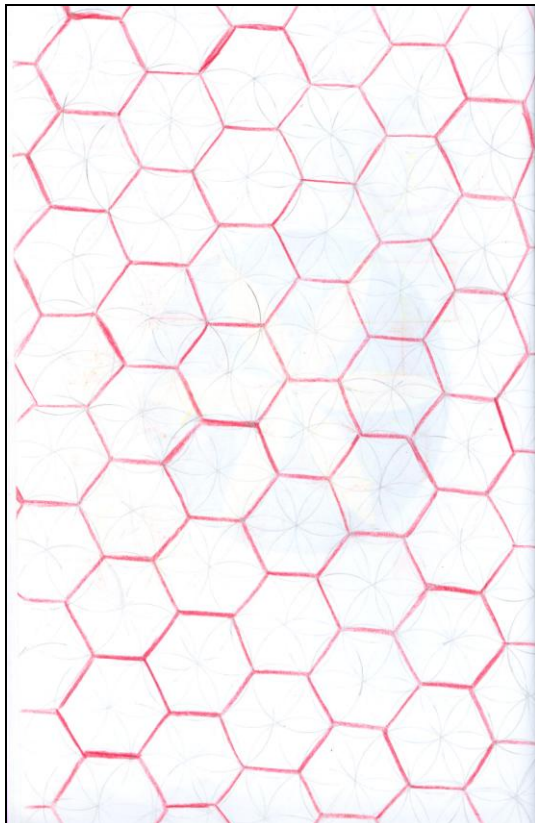
Narýsovat jeden kruh a rýsujeme další a další kružnice, jejichž středy jsou na té první kružnici. Plnou stránku kruhů. Postupný vznik kruhového pole je vidět na obrázku:



Pak spojujeme vzniklé body pomocí pravítka, které vzniknou protínáním kružnic. Vzniknou nám všechny možné útvary: lichoběžník, kosočtverec, pětiúhelník... A také dostaneme základní geometrické konstrukce (půlení úsečky, úhlu, vztyčování kolmice apod.)

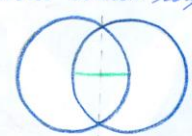
To je zase onen základní postup: Od celku (celek=harmonie=kruh) k částem (svět mnohoúhelníků).

Ve středu papíru většinou vše vypadá harmonicky, ale ta konstrukce dětem prozradí, že uprostřed papíru udělaly malé nepřesnosti a ty se nasčítají, zvětší a projeví se výrazně na krajích. To je velmi poučné pro běžný život.



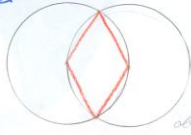
Jakoby mimochodem nám vzniká celá řada geometrických úloh.

Na druhém obrázku vidíme dvě kolmice. Změnil pravoúhelník. Proto není nutné mít trojúhelník s úhlem. Hledáme si i lex nej. Kromě toho nám vznikla i osa symetrie oba středy. Ten jsme tuto úlohu zároveň rozpuštěli.

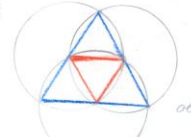


obr. 2a

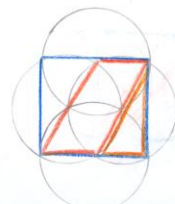
Kromě toho nám lze naměřit kosinusy:
 Na druhém obrázku nám vznikl rovnoramenný trojúhelník.
 Vlastní rovnou dva: velký a malý.
 Kromě nám vznikl lichoběžník. Mimochodem nám vznikly i rovnoběžníky.
 Na třetím obrázku objevíme obdélník.



obr. 2b

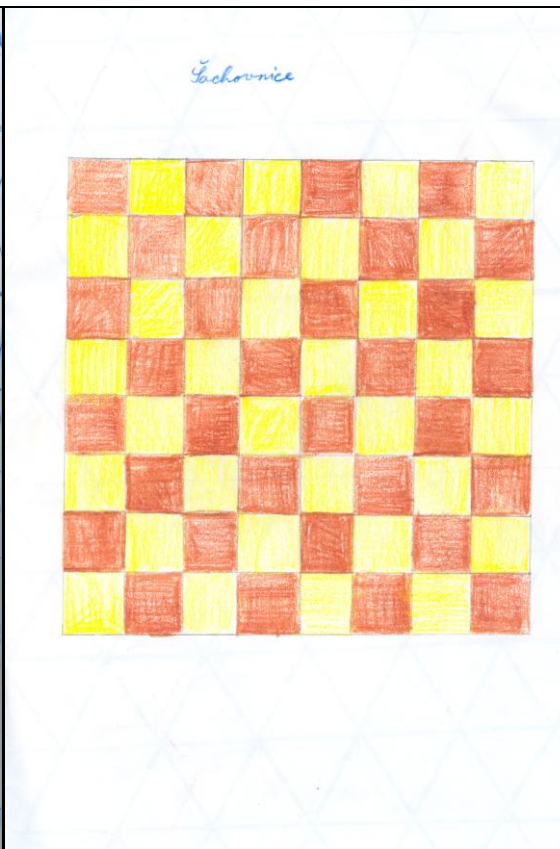
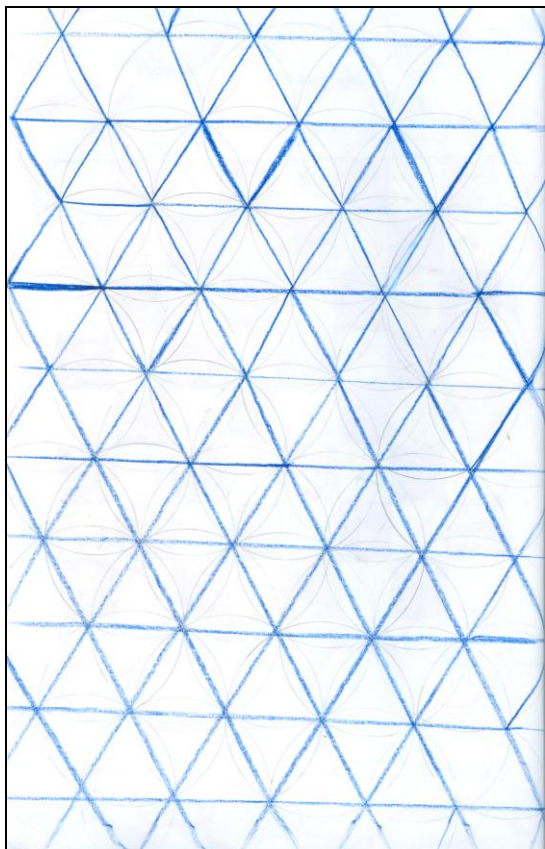


obr. 3a



obr. 4. Zde můžeme objevit rovnoběžníky. Kromě vidíme pravoúhelník.

Je vidět, že nám také vznikla šestiúhelníková mozaika. Existují ještě dvě podobné stejnorodé mozaiky – trojúhelníková a čtvercová:



Podíváme-li se pozorně na čtvercovo-osmiúhelníkovou mozaiku, můžeme podobným způsobem odvodit, že vnitřní úhel v osmiúhelníku se rovná 135 stupňům. Každý vrchol mozaiky je totiž obklopen dvěma osmiúhelníky a jedním čtvercem. To znamená, že je třeba od 360 odečíst 90 a výsledek vydělit dvěma, což nám skutečně dá 135 stupňů. Dostáváme tedy následující částečně vyplněnou tabulku:

velikost úhlu v pravidelných mnohoúhelníku

počet vrcholů	3	4	5	6	8	12
velikost úhlu	60°	90°	?	120°	135°	150°

Uvědomme si, že v pravidelném mnohoúhelníku všechny strany a všechny úhly jsou stejné - ovšem stále geometriji a geometriji: Velikost úhlu se stále plynule mění (když se blíží k 180°) ale nikdy k němu nedostáváme (když by to bylo, už bychom neměli žádný vnitřní úhel). Jak, ale zjistíme velikost?

Uvědomme si, že pravidelný mnohoúhelník je vlastně jen takový pravidelný trojúhelník, který se skládá z několika trojúhelníků. Na první pohled není žádná náhodná souvislost patrná. Rozhodneme si pro tuto tabulku:

počet vrcholů	3	4	5	6	8	12
velikost úhlu	60°	90°	108°	120°	135°	150°
velikost vnějšího úhlu	120°	90°	72°	60°	45°	30°

Podíváme se nyní pozorněji na tuto tabulku: V prvním řádku se číslo mění rovnoměrně. V 3. řádku se číslo zmenšuje. Velikost se mění podle pravidla, které se snažíme odvodit. Každý vrchol je obklopen dvěma osmiúhelníky a jedním čtvercem.

Úhly u n-úhelníků jiných tvarů

Podobně můžeme spočítat úhly i u n-úhelníků jiných tvarů:

pravidelný rovnostranný trojúhelník

2 malých úhly 90°
1 velký úhel 90° - 2 = 45°

pravidelný čtverec

jak velký je každý úhel?

pravidelný trojúhelník

jak velký je každý úhel?

pravidelný pětúhelník

jak velký je každý úhel?

pravidelný šestiúhelník

jak velký je každý úhel?

Z textu v sešitě je patrné, jak je možné spolu s dětmi objevit určitou zákonitost, která nám umožní zaplnit prázdné místo v tabulce. Zobecněním tohoto postupu dostaneme heuristické odvození známého vzorce pro součet úhlů v mnohoúhelníku. Dále je z obrázků na pravé straně zřejmé, že i obecný důkaz věty o součtu úhlů v trojúhelníku je možné provést pomocí mozaik.

Je zajímavé, že mozaikami se velmi systematicky zabýval Johannes Kepler. Nejzajímavější a asi i nejkrásnější jsou jeho pětiúhelníkové mozaiky. Zdálo by se, že s pětiúhelníky není možné pokrýt rovinu. Povolíme li však také pentagramy a desetiúhelníky a určitý druh překrývání, vzniknou nám nádherné mozaiky. A odtud už není tak daleko k Penroseovu aperiodickému dláždění, ke kvazikrystalům, fullerenům a nanovláknům, které byly objeveny, přesněji řečeno uměle vytvořeny 350 let po Keplerově smrti. O Keplerových výzkumech se můžete více dočíst v knížce Ernsta Bindela (Harmonien im Reiche der Geometrie), jednoho z prvních waldorfských učitelů, která bude v nahlédnutí na webu semináře. K problematice kvazikrystalů pak pěknou knihu Mario Livia o zlatém řezu, která byla přeložena do češtiny.

Výuka geometrie v 6. –9. třídě

V tomto období dominuje MYŠLENÍ

- Zde se naplno probouzí logické myšlení ve vlastním slova smyslu, před námi stojí celoživotní úkol osvojení si čistého, skutečně tvořivého myšlení.

Myšlení má totiž 3 aspekty:

1. všímání si=myšlení + cit - všímání si souvislostí ve světě (něco je kolmé, hranaté atd.) – vychází s citu)

2. logické odvozování=myšlení + vůle - vychází z vůle - z pohybu (sledování důkazů)

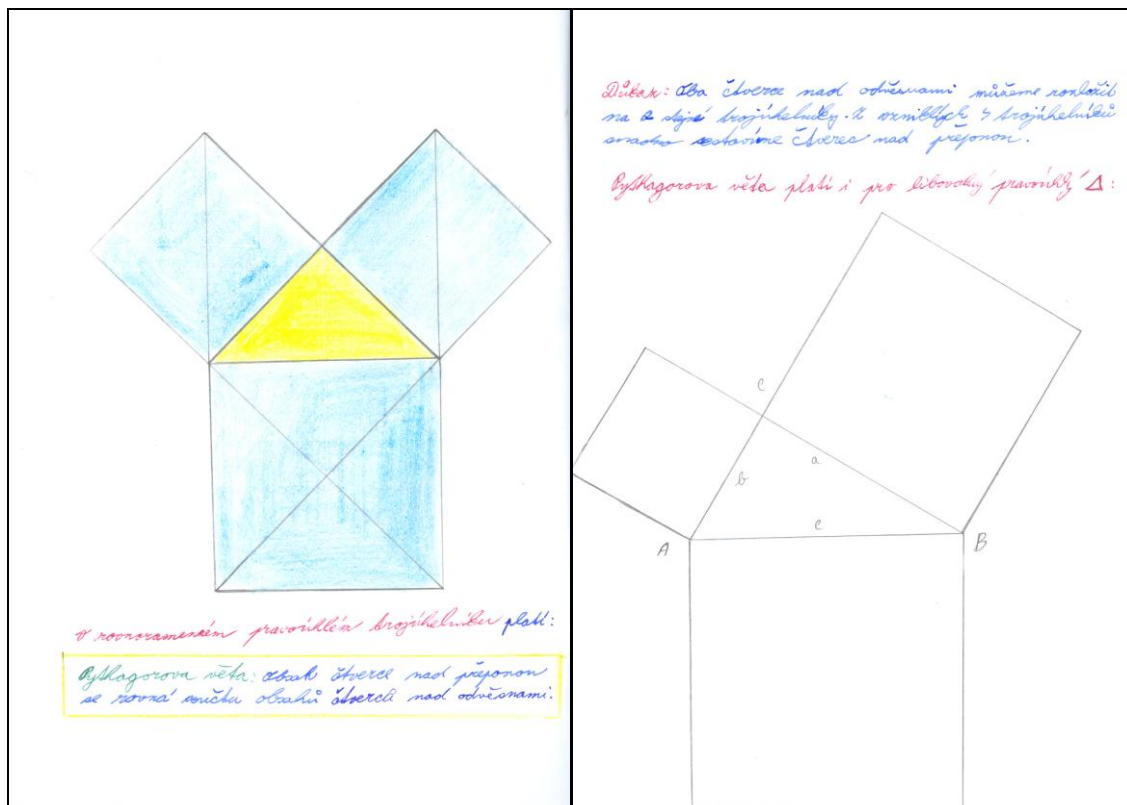
3. myšlení samo o sobě=tvořivé myšlení (vynalézání klíčových fint v důkazech)=čisté myšlení (něco pochopit tím, že mě něco napadne)

6. třída

Rudolf Steiner říká, že v šesté třídě by se měla probírat klasická důkazová geometrie, a že by se mělo dojít až k důkazu Pythagorovy věty. To co je hlavním cílem, tedy není přesné či krásné rýsování – to by si děti měli osvojit již v páté třídě – např. rýsováním čtverných mozaik. Hlavním cílem jsou přísně logické důkazy.

Mělo by se vývojově předjímat to, k čemu dítě teprve – v blízké době - doroste – tj. o měsíc nebo dva před tím, než se v něm docela probudí schopnost abstraktního pojmového myšlení. Proto musíme v šesté třídě začít brát skutečnou geometrii a skutečnou algebru, a ne čekat, až se u nich ta schopnost plně probudí. Tohle totiž děti také podvědomě cítí, a víc učiteli věří, když si všimnou, že dokáže vycitovat, kam je má vést (když má nadhled), než když by nejprve vždy čekal až na ně.


Může se také stát, že nám uteče důležité v období 4.-6. třídy, kdy jsou děti ještě velmi lačné po informacích a s nadšením spolupracují a učí se. V 6. třídě by pak totiž měly dělat geometrické důkazy – a tudíž by jim v této době už měly být známy základní geometrické útvary a jejich vlastnosti, měly by je mít v představách k dispozici. Zbytečně by je zatěžovalo, kdyby se musely se základními geometrickými útvary seznamovat až teď a přitom paralelně procházet těžkými důkazy!



O důkazech Pythagorovy věty v případě nerovnoramenného trojúhelníka více na prosincovém semináři, věnovaném především zlatému řezu.

7. třída

Pro 7. třídu se velmi hodí téma podobnosti, které je možné exemplárně probrat v epoše zlatého řezu. Ale o tom více v prosincovém semináři.



THALÉS A PIRAMIDA

Thalés si lehl na píseku. Do písku se oblékne jeho tělo. Běží si stopy a páska, až bude jeho stín stejně dlouhý jako oběť jeho podoby. A ten okamžik bude stín pyramidy stejně dlouhý jako její výška. **Průřez**

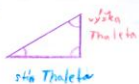
Oba trojúhelníky mají stejný úhel.
Thalésův Δ je rovnostranný,
proto souvisí s výškou pyramidy.
 Δ také rovnostranný.
Proto výška pyramidy = délka stínu pyramidy.

Právda: Trojúhelníky mají stejný úhel rovněž podobné.
I, že oba Δ jsou si podobné je vidět na obrázku, že oba Δ mají stejné úhly.

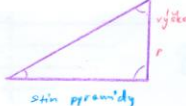
Věta: dva trojúhelníky jsou si podobné právě tehdy, když mají stejné úhly.

úkol: Thalés stojí před pyramidou. Thalésův stín je 2x delší než jeho výška. A ten stínový obamník má stín pyramidy 274 m. Jak vysoká je pyramida?

Řešení:



stín Thalésa



stín pyramidy

Stín Thalésa: výška Thalésa = 2:1
Oba Δ mají stejný úhel, proto si
Stín pyramidy: výška pyramidy = 2:1
Stín pyramidy má 274 m její výška je tedy
 $274 : 2 = 137$ m.

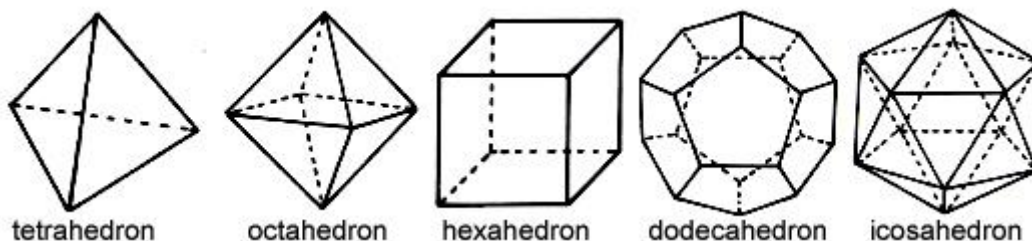
Věta: dvě trojúhelníky mají stejné úhly rovněž podobné.

8. třída

Je možné probírat klasickou teorii trojúhelníka a geometrické transformace. A s tím souvisí téma geometrických míst bodů a konstrukční geometrie. Tyto témata jsou blízké i státní škole, nicméně na webu lycea časem zpřístupníme ukázkový sešit.

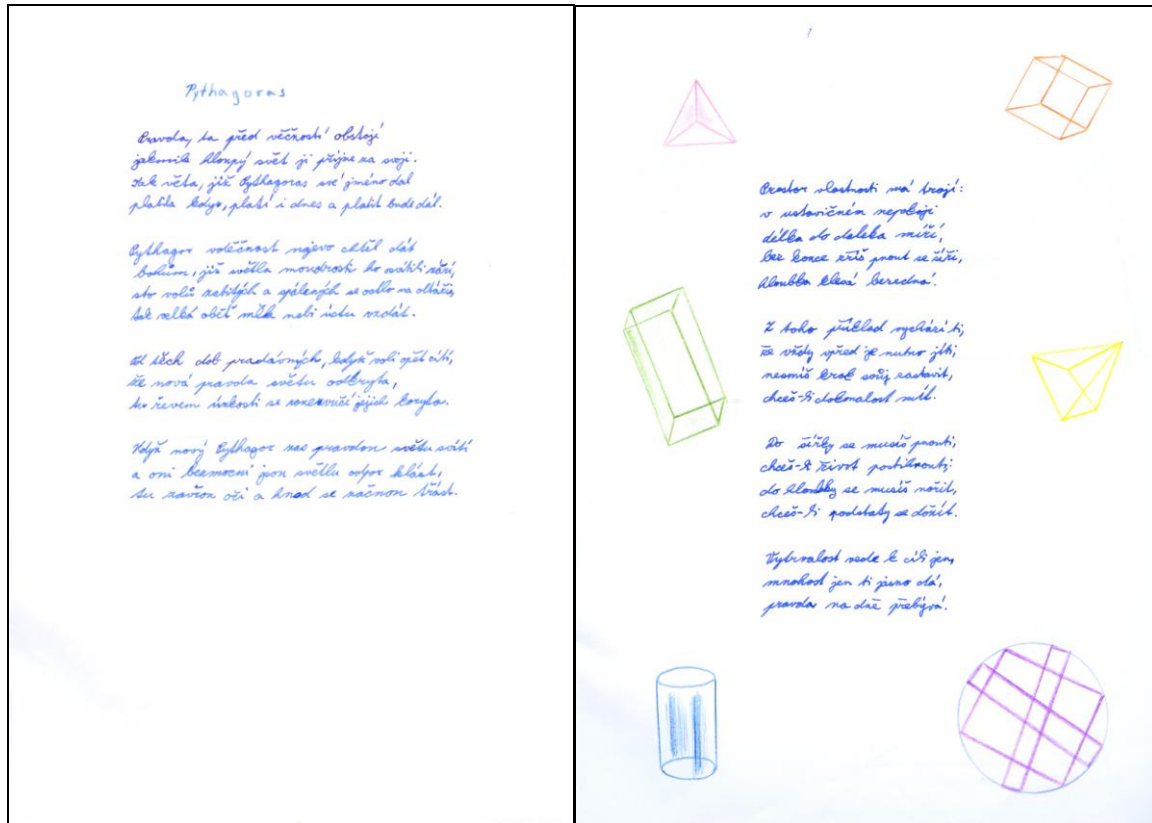
9. třída

Pokud žáci nepokračují ve studiu na waldorfském lyceu, vřele bych doporučoval úvod do deskriptivní geometrie a krásné téma platónských těles. V tomto věku děti definitivně opouštějí dětský svět, proto jsou zvláště otevřené krásným, duchovně naladěným věcem.



Pár slov obecně k metodice vyučování geometrie

-na začátku bývá rytmická část, v ideálním případě by byla zbytečná, Steiner ji nikde nezmiňuje. Ale faktem je, že to děti zharmonizuje po jejich příchodu do školy – po ranním domácím stresu a cestě velkoměstem potřebují přijít k sobě. Otázka je, jak by měla být dlouhá a jak by přesně měla vypadat. Existuje pár pěkných básní věnovaných geometrii, například tyto:



Někdo si místo rytmické části s dětmi povídá. To může mít hluboký smysl.

-na začátku, tedy po krátké rytmické části, by byla nevhodnější nejhlubší myšlenková část, objevování zákonitostí, mělo by se využít toho, co prošlo nocí

-pak děti rýsují, samostatně pracují, zde je oslovena vůle

-nakonec by se mělo přejít k citu – zde vlastně děti vnitřně odpočívají, jsou pasivnější. Je možné vyprávět, nebo si děti mohou krasopisně opisovat z tabule zápis, kreslit a vybarvovat geometrické obrazce

Tématu podobně obsažnému jako svět čtyřúhelníků by se měl věnovat asi tak týden, tj. 5 x hlavní vyučování. Všechny nové myšlenkové postupy by se měly – spíše nenápadně, v různých obměnách třikrát zopakovat. Jinak hrozí, že látka utkví na povrchu. V případě čtyřúhelníků vypadal průběh zhruba takto:

- 1.a 2. den – probrali se všechny nové objekty, jejich názvy, charakterizovali se jejich hlavní vlastnosti
3. den - opakovali se a prohlubovali vlastnosti

4. den – procvičování se zesložovalo, aniž by se zaváděli nové pojmy. Pokud budou cvičení pořád těžší a těžší, nebudou bystří žáci znuženi. Samozřejmě paralelně slabším žákům zadáváme jednodušší úlohy typu prvních dvou dnů, aby to nakonec pochopili a věc si v základech osvojili.

5. den – je třeba skončit něčím, co poukazuje do budoucna a nechává toto budoucno otevřeným. Může se jednat o nějakou hádanku, příslib něčeho, co bude v budoucnosti...

Tento vývoj ještě více platí pro pravé, třítydenní nebo čtyřtydenní epochy. Zde se ovšem zpravidla proplétá několik hlavních linií najednou. Proto je pak příprava složitější. Není možné 3 týdny probírat tak omezené téma jako svět čtyřúhelníků, je třeba přidat jiná témata.

Výuka matematiky a především geometrie na waldorfských školách bývá často nedostatečně náročná, proto bych chtěl ještě říci pár slov o náročnosti.

Proč je důležité zadávat dětem občas velmi těžké otázky?

Tím můžeme dosáhnout toho, že se proberou ty děti, co je geometrie nezajímá. Zajímá je totiž, jestli je chytřejší učitel nebo ty nejchytřejší děti ve třídě. Anebo jestli jsou chytřejší kluci než holky atd.

Všimnou si: Když nějakou otázku neví ani premiant, tak to asi bude opravdu těžké... Pro ty chytré je taková otázka naopak výzvou, aby se ji pokusily vyřešit...

Ale pokud dám příliš těžkou otázku slabému žákovi, a třída uvidí jeho neschopnost, tak se žák zpravidla vypne na celý zbytek hodiny.

Celek je těžší nebo lehčí? To co vychází z života je velmi složitě. Pro nás je lehké zodpovědět učebnicové příklady.

Ve waldorfské pedagogice postupujeme od celku k částem.

Co pojmy těžší a lehčí přiřadit k pojům celek a část?

Celek je něco z praxe, z reálného života - život je pro logické uvažování příliš komplexní, a proto není většina lidí schopna jej správně předpovědět, vypočítat. Celek je tedy život. V těžší otázce je celek – a začátek s těžkou otázkou může být velmi motivující – může navodit zklidnění třídy a koncentraci... Taková koncentrace na začátku hodiny může být velmi užitečná a motivující...

A pak už je možné dávat lehčí otázky, což odpovídá částem.

Tzn. není od věci začít těžkou otázkou. Žáci si pak uvědomují, co vše je ještě nad nimi a to je vede k pokoře, ke koncentraci. Musíme ale navodit správnou atmosféru zvědavosti přerůstající v údiv nad neznámým.

Je ideální, aby se děti koncentrovali na geometrii a nerušili tuto koncentraci zápisem – zápis se dá dohnat i později, klidně i příští či přespříští hodinu, kdy je už látka více upevněná.

Jak upevňovat látku – především ústním opakováním v kreativních variacích – dejme tomu 2-3 dny jedno téma. K písemnému opakování a řešení příkladů přejít až když ochabne pozornost dětí, pak se s ústním procvičováním přestane – děti si zakreslují, zapisují ... a vlastnosti obrazců v nich podvědomě doznívají.

Jak už bylo zmíněno, ke konci hodiny je dobré nechat děti vybarvovat obrazce, aby si odpočali. Když je totiž nenechám na konci hodiny vydechnout a nutím je se koncentrovat (písemka, logika...), pak žáci vyletí ze třídy a mají destruktivní tendence. Na dalších hodinách už nemají sílu něco vnímat...

Proto je dobré dát dětem na konec něco, kde mohou být vnitřně trochu pasívní, co nevyžaduje soustředěnou koncentraci, co jim umožní si odpočinout – to je buď vybarvování nebo také vyprávění. Například o velkých řeckých geometrech – o O Thalesovi, Pythagorovi, Archimédovi... Ale pozor – nejpozději od páté, šesté třídy by vyprávění mělo být k tématu epochy, jinak to může vzbudit velkou nevoli dětí ! Oni se chtějí učit o seriózní vědě geometrii! Nechtějí poslouchat starořecké báje.

Příště se podrobněji podíváme na sedmou třídu – seznámíme se s různými typy důkazů Pythagorovy věty a s téměř nevyčerpatelnou problematikou zlatého řezu.

