Geometrie a zlatý řez

Pythagorova věta

Podívejme se na několik geometrických důkazů Pythagorovy věty využívajících různých druhů myšlení.

Úvaha o začátku vyučování, je nutná a prospěšná rytmická část na úvod hodiny? R. Steiner se o rytmické části nikdy nezmiňoval. Co projde nocí, by bylo dobré zpracovat. Ale musíme navázat na cestu do školy, zklidnit děti, aby přišli k sobě. Ale jak? Možná právě rýsováním nebo něčím zvědomujícím ještě před průpovědí. V sedmé třídě je možno vnímat, že žáci touží po vědě a nelpí na tradičním uspořádání hodiny.

1) Důkaz skládáním, aditivní:

Materialistický důkaz fyzickým poskládáním dílců. Metoda skládání se hodí asi tak do 4.-5. třídy. Obrazné myšlení. Nevyžaduje logické myšlení.

2) Důkaz odečtením (substraktivní):

Hodí se do 6. třídy, k pochopení již potřebujeme logické myšlení. Na tomto příkladu poznáme, jak jsou žáci pokročilí ve vývoji logického myšlení.

Čtyři úrovně chápání:

1) sami vymyslí tento důkaz
2) po nějaké době sami přijdou na princip důkazu
3) pochopí po výkladu
4) nepochopí ani po výkladu

3) Důkaz přeměnou (transformační):

Sešikmování tvarů. Euklidova věta o odvěsně pojednává právě o zakreslené polovině třetího důkazu. Zde potřebujeme představivost obrazů v pohybu. Živá příroda je neustále v pohybu, tento způsob myšlení je právě vhodný pro živé myšlení a porozumění přírodě.

4) Důkazy pomocí podobnosti (poměrové):

Pokud důkaz pochopíme, přijde nám triviální. Je zřejmé, že součet obsahů horních vyklopených trojúhelníků je roven obsahu dolního vyklopeného trojúhelníka. Proto je i součet obsahů čtverců nad odvěsnami roven obsahu čtverce nad přeponou. Všechny vyklopené trojúhelníky totiž tvoří stejnou část jím opsaného čtverce.

Poznámka 1:

Je dobré zadávat stejný dotaz a ptát se jiných, kteří to dosud nepochopili. Znovu objevovat každou důležitou myšlenku 3x. Pomalým žákům tím poskytneme více příležitostí k pochopení a rychlejším žákům to pomůže si věc na dlouho, možná i na mnoho let zapamatovat. Obecně je nutné se vracet k probrané látce i po delší době, aby si ji děti pamatovali.

Poznámka 2:

Důležité praktické věci z matematiky:

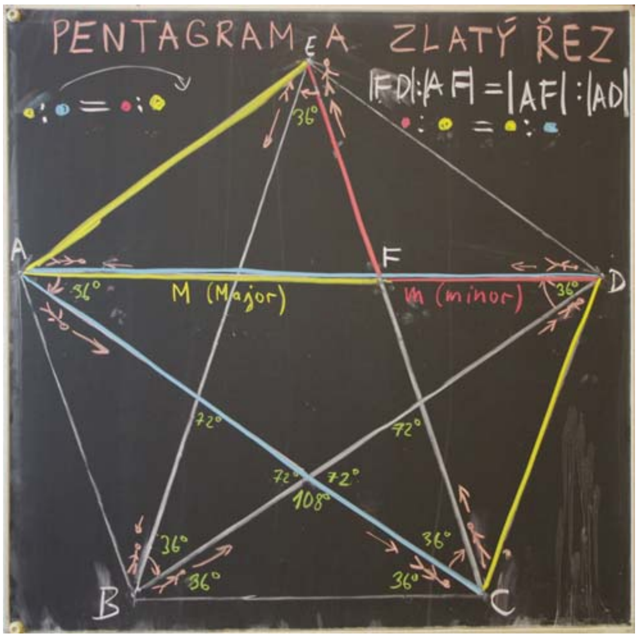
- trojčlenka (obsahuje i procenta a podobnost trojúhelníků)
- Pythagorova věta
- pochopit co je to průměr a co lze a nelze průměrovat

Pentagram a zlatý řez

Trojčlenka v geometrii: podobnost trojúhelníků.

Pythagorova věta velice souvisí s naším fyzickým „hranatým“ světem (stavebnictví, nábytek, ...)

Pentagram souvisí se světem krásy, jehož symbolem je Venuše.



1) Kolik je tam skrytých různých typů trojúhelníků?

Jeden trojúhelník ostroúhlý a jeden tupoúhlý (tzv. zlaté trojúhelníky)

2) Kolik od každého tvaru je různých velikostí?

Ostroúhlých 40 a tupoúhlých 15.

3) V kolika různých velikostech se vysktují?

Ostroúhlý 3, tupoúhlý 2 velikosti.

4) Kolik jich je totožných?

Trojúhelník daného tvaru a velikosti se v obrázku vyskytuje 5x nebo 10x.

5) Jaké jsou úhly v pěticípé hvězdě?

Na obrázku je možné najít úhly 36°, 72°, 108°. Jak toto dokázat?

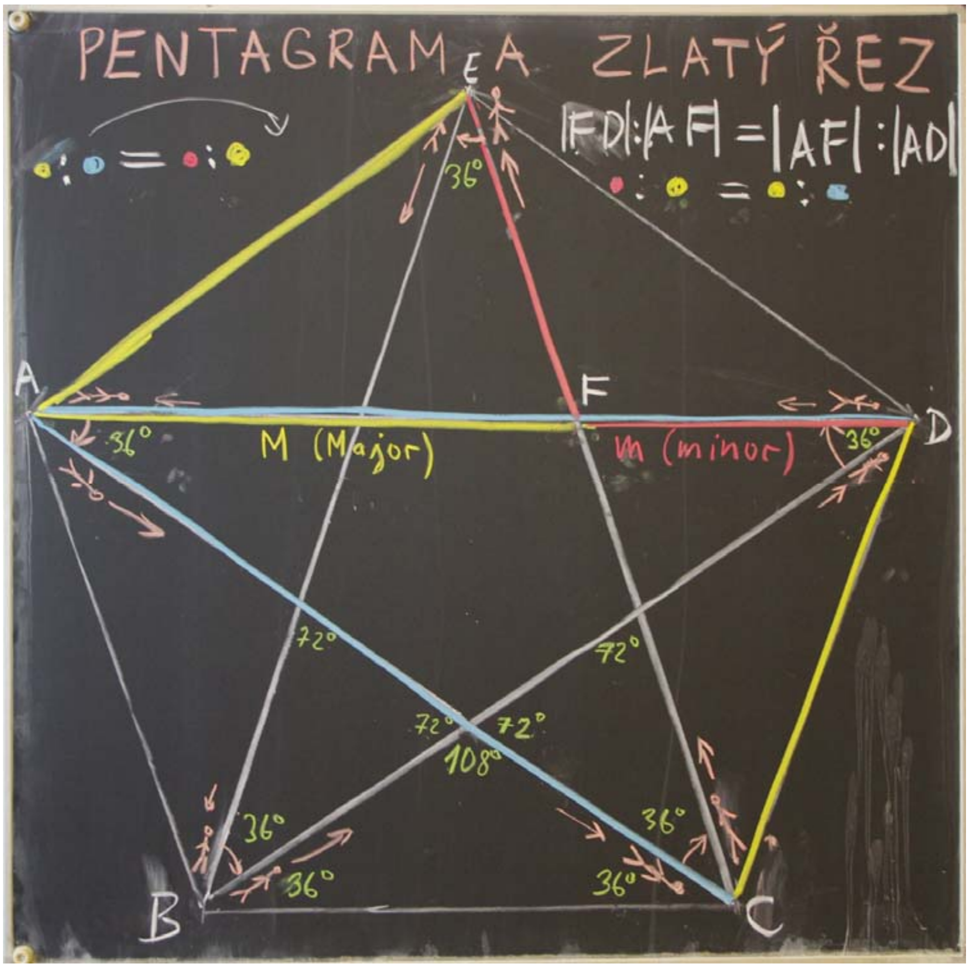
a) Klasicky rozdělením na trojúhelníky a systematickým postupem (krok za krokem). Čisté myšlení bez použití citu.

b) Pohybem: Člověk si představí pentagram na zemi a pohybuje se po hvězdě. Projde tah pentagramu a zjistí, otáčí-li se podle vnitřních úhlů, že mohl vidět pouze polovinu okolního prostoru. Otáčel se v rozsahu 180° a dostal se tam, kde byl, ale v opačném směru. Je-li součet úhlů 180, vydělíme jej pěti, a dostaneme 36°.

Prošlapej hvězdu, pětkrát jdi a pětkrát toč, půl světa uzříš...

Poměry v pentagramu.

V celém složitém obrazci nalezneme jeden jediný poměr. A to tzv. zlatý řez. Buď přímo zlatý řez či poměr složený z více zlatých řezů.



„Poměr větší části ku části menší se rovná poměru celku ku části větší."

AF/FD = AD/AF

Délka AF je tzv. geometrický střed délek FD a AD.

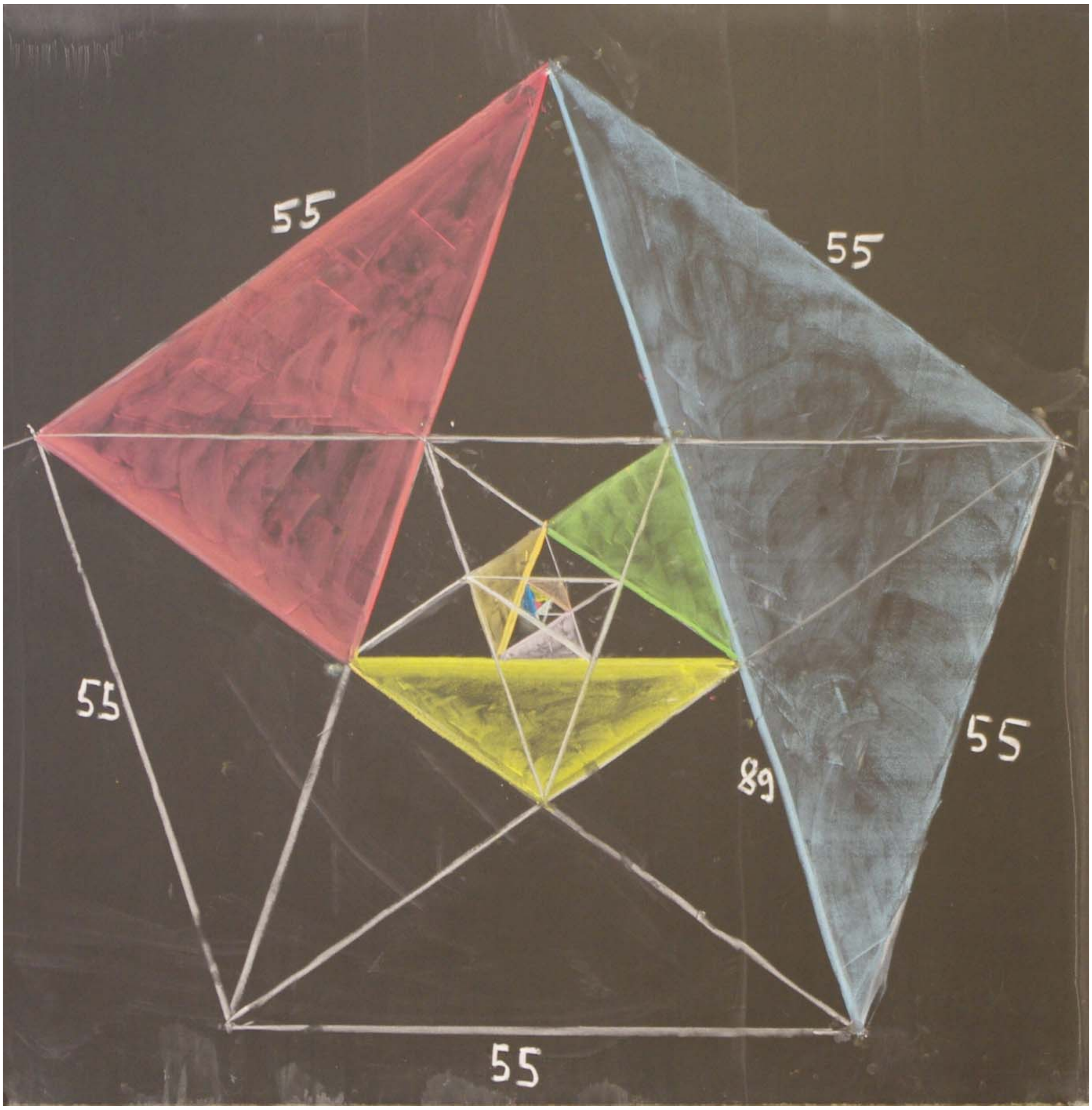
Poznámka: Počítat výslednou známku jako aritmetický průměr známek je pseudovědecký postup. Proč nepoužívat jiný druh průměru? Geometrický, harmonický, kvadratický, ...? Je oprávněné dávat vždy přednost aritmetickému průměru? Jsme schopni se rozhodnout, který průměr v jaké situaci použít?

Lze pozorovat, že při růstu a v přírodě se vždy uplatňují proporce geometrického průměru a zlatého řezu. S tím souvisí logaritmická spirála, kterou lze krásně pozorovat u některých mořských živočichů, např. nautilius.

Důkaz zlatého řezu v pentagramu plyne z podobnosti trojúhelníků ADE a FDE.

Jak rozlišit přesný a přibližný důkaz? To, že něco vidíme v matematice ještě není důkazem. Např. „vidíme", že všechny tři úhly u bodu B jsou shodné. Nicméně musíme dokázat, že se nejedná o zdání, ale o přesnou rovnost.

Zmenšující se délky úseček v pentagramu a důkaz iracionality zlatého řezu



Půdu pro tento důkaz si připravíme tak, že děti necháme narýsovat pětiúhelník s délkou strany 55cm a úhlopříčkou 89cm. Stačí udělat úsečku 55cm a pak dva obloučky 89cm a takto najit vrchol E a podobně sestrojit i body A a D.

Poté, co si děti pentagram a v něm vepsané další pentagramy dorýsují, zadáme dětem následující úlohu:

Vypočítejte délky všech úseček v obrázku, a zjistěte, jak dlouhé by byly délky nejmenších, v obrázku již nerozeznatelných úseček.

Děti po určité době přijdou na následující řadu zmenšujících se čísel:

89,55,34,21,13,8,5,3,2,1 ...

Ale jak to pokračuje dál?

Měli bychom dál odečítat, a tedy dostat následující pokračování řady:

89,55,34,21,13,8,5,3,2,1,1,0,1,-1...

To je nějaké divné! Jak může být délka strany pětiúhelníka rovna nule nebo dokonce mínus jedné? To je přece nesmysl! Kde jsme udělali chybu?

Až po dlouhé době možná někteří bystří žáci přijdou na to, že asi původní zadané délky stran a úhlopříček (55,89) nebyly přesné. Kdyby totiž byly přesné, nemohl by nám takový nesmysl vyjít, protože postup výpočtu byl sám o sobě správný. Jde o to, že jsme vycházeli z nesprávného předpokladu. Tudíž 55 a 89 to ve skutečnosti být nemohlo. I když to řekl pan učitel. Malá nepřesnost, kterou oko nerozezná. Nicméně rozum je schopen pomocí logiky tuto chybu objevit. Je tedy zlatý řez vyjádřen nějakou jinou dvojicí čísel?

Asi těžko, protože bychom nutně dospěli ke stejným absurditám – ať už jsou počáteční hodnoty jakékoli, někdy se musíme postupným odečítáním dostat pod nulu. Čísla se totiž pořád zmenšují.

Tím jsme dokázali, že zlatý řez nelze vyjádřit jako poměr dvou celých čísel. Tudíž byl pro Řeky neuchopitelný pomocí aritmetiky. Aritmetika se tím pádem pro ně stala něčím nedokonalým, něčím podřadným geometrii. Pro kulturu Řecka to znamenalo, že nejvyšší a nejposvátnější částí matematiky se stala geometrie, aritmetiku přenechali obyčejným kupcům a prostým lidem. Filosofové jí zpravidla opovrhovali. A od té doby až do poloviny 19.století lidé matematikům říkali geometři.

Výše uvedený důkaz iracionality (česky: „nerozumnosti“) zlatého řezu se řadí k tzv. důkazům sporem. Předpokládáme opak toho, co chceme dokázat a postupně dojdeme k absurditě (ke „sporu“). Z toho plyne, že předpoklad musel být nesprávný, a dokazované tvrzení platí. Aby člověk takovýto důkaz pochopil, musí už mít probuzené čisté abstraktně-logické myšlení. Děje se to už v 7.třídě? Nebo dřív? Či snad později? Nechť si každý ze čtenářů odpověď najde sám. Na základě vlastního pozorování.

Zlatý obdélník

Sestrojíme se obdélník o délce stran 55 a 89, tedy zhruba ve zlatém řezu. Z něho můžeme odříznout čtverec. Zbude nám zase zlatý obdélník. Z něho odřízneme čtverec atd. Proces by pokračoval do nekonečna, pokud by výchozí strany byly skutečně naprosto přesně ve zlatém řezu. Nakonec je do obrázku možné zakreslit tzv. zlatou logaritmickou spirálu.