Waldorfské lyceum, Křejpského 1501, 149 00 Praha 4

Zlatý řez v matematice, přírodních vědách a umění

Odborná maturitní práce

2013/2014

Autor práce: Tomáš Jozefík
Vedoucí práce: Pavel Kraemer

Poděkování:

Chtěl bych poděkovat pánům profesorům, vedoucímu práce Pavlovi Kraemerovi a oponentovi Radovanovi Danielovi za odborné vedení a pomoc při zpracování maturitní práce.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

Podpis: Datum:

Souhlasím s předloženou podobou maturitní práce.

Podpis: Datum:

Obsah

Úvod ... 3
1. Historie zlatého řezu ... 4
2. Zlatý řez v matematice ... 6
2.1 Definice zlatého řezu a jeho číselná hodnota ... 6
2.2 Konstrukce zlatého řezu ... 8
2.3 Zlaté číslo v rovině ... 8
2.3.1 Zlatý obdélník ... 9
2.3.2 Zlatý trojúhelník ... 10
2.3.3 Zlatá (logaritmická) spirála ... 11
2.3.4 Zlatý úhel ... 12
2.3.5 Pravidelní pětiúhelník ... 13
2.3.6 Pravidelný desetiúhelník ... 13
2.4 Zlatý řez v prostoru ... 14
2.4.1 Platónské tělesa ... 14
2.4.1.1 Duální mnohostěny ... 15
2.4.1.2 Dvanáctistěn ... 16
2.4.1.3 Dvacetistěn ... 16
2.4.1.4 Osmistěn ... 16
2.5 Fibonacciho čísla ... 16
2.5.1 Úloha s králíky ... 17
3. Zlatý řez v přírodních vědách ... 19
3.1 Fylotaxe ... 19
3.2 Logaritmická spirála v přírodě ... 22
3.3 Fí v lidském těle ... 23
4. Zlatý řez v umění ... 25
4.1 Výtvarné umění ... 25
4.2 Hudba ... 29
Závěr ... 31
Seznam literatury ... 32
Internetové zdroje ... 33
Obrázky ... 33

Úvod

Maturitní práci zlatého řezu jsem si vybral z důvodu mé zvědavosti o toto téma. Slyšel jsem o něm jen okrajově, proto mým zájmem bylo hlouběji vniknout a prozkoumat, do toho, co všechno toto téma obnáší. Zaujala mě hlavně kniha od Maria Livia - *Zlatý řez*, na které jsem především tuto práci stavěl.

Když si položíme otázku, co mají společného půvabné uspořádaní okvětních lístků růže, slavný obraz Salvadora Dalího - *Poslední večeře*, nádherné spirálovité skořápky měkkýšů a rozmnožovaní králíků, asi jen těžko uvěříme, že tyto na první pohled úplně rozdílné jevy se ve skutečnosti točí kolem jediného čísla, respektive geometrického poměru, takzvaného φ (fí). Toto číslo začíná 1, 61803… a končí v nekonečnu. Z jistého ohledu je nejiracionálnějším[1] číslem vůbec. Znali ho již starověcí matematikové a v 19. století získalo toto číslo čestná označení „zlaté číslo“, „zlatý poměr“ a především „zlatý řez“. Toto číslo dostalo dokonce i označení „božská proporce“, z důvodu jeho velkého obdivu.

V mé práci se budu zabývat postupně historii zlatého řezu, od jeho chápaní u Eukleida, jestli byl tento poměr použít staviteli u slavných pyramid a aténského Parthenonu, pak přejdu k matematické stránce zlatého řezu, přes Fibonacciho čísla až po zlatý řez v přírodních vědách a v umění.

[1] Je číslo, které se nedá vyjádřit poměrem dvou celých čísel

1. Historie zlatého řezu

Historie zlatého řezu je pravděpodobně velmi dlouhá, údajně byl tento poměr použitý již při stavbě velkolepých pyramid, starých téměř 5 tisíc let. O tomto zlatém poměru se mluví hlavně u Cheopsovy pyramidy. Potvrzené to ale definitivně není. Existuje množství hypotéz pro a proti, jestli se v pyramidách zlatý poměr vyskytuje. Je však pravděpodobné, že pro výstavbu pyramid zlatý řez záměrně použit nebyl a je to jen náhoda, že se poměr výšky trojúhelníků pyramidy k polovině strany její základny blížil k zlatému řezu. Jde hodně i o hru s čísly, protože naměřené hodnoty nemuseli být úplně správné a jen malá chyba ve výpočtu by mohla posunout hodnotu poměru úplně někam jinam. Definitivně tento případ zlatého řezu v pyramidách ale uzavřít nemůžeme. Mystická přitažlivost pyramid a zlatého poměru může být silnější, jako spolehlivé důkazy.

Kolem roku 300 př. n. l. antický matematik Eukleides podal jako první jednoznačnou definicí fenoménu, pro nějž se později ustálilo označení zlatý řez. Díky svým fantastickým objevům vzbuzuje tak hluboký obdiv, že například v roce 1923 básnířka Edna St. Vincent Millayová napsala báseň „*Jediný Euklid nahlédl absolutní krásu*.“

Eukleides získal své znalosti matematiky na Platónově akademii. Nejvíc se proslavil svým dílem: „*Základy*“, kde se zlatý řez objevuje na několika místech. V díle uvedl následující úlohu o zlatém řezu: „Rozdělte danou úsečku na dvě nestejné části tak, aby čtverec sestrojený nad větší části měl stejný obsah jako pravoúhelník, jehož jedna strana má délku menší částí a druhá délku celé úsečky." Řešení této úlohy je právě rozdělení úsečky v poměru zlatého řezu. Toto nevinné rozdělení úsečky ovlivní pohled na otázky sahající od uspořádání listů v botanice po strukturu galaxii s miliardami hvězd a dotkne se celé řady oborů od matematiky až po umění.

Eukleidovo dílo bylo uznáváno až do moderní doby. Často se říká o téměř neuvěřitelném faktu, že z jeho díla *Základy* se učili ještě studenti na začátku 19. století.

Další stavbou, nad kterou se polemizovalo o výskytu zlatého řezu, je antický Parthenon, který byl postaven architekty Iktinem a Kallikratem na aténské Akropoli. Dohled nad sochařskou výzdobou měl na starosti Feidias. Ve většině prací o zlatém řezu se dá nalézt, že rozměry Parhenonu v čase, kdy měl trojúhelníkový štít ještě neporušen, přesně odpovídají zlatému obdélníku. Také se udává, že zlatý poměr figuruje i v jiných rozměrech Parthenonu. I zde u této stavby se vyskytli různé zpochybnění o výskytu zlatého řezu, např. od matematika Georga Markowského. Naměřené rozměry jsou v různých zdrojích jiné, proto si na otázku,

jestli tady byl použitý zlatý řez, jasně neodpovíme.

Po antickém období nastává dlouhá pauza, kdy se zlatý řez úplně vytratil z povědomí lidí. Se zlatým řezem se znovu setkáváme až v období renesance (15. století) a to zejména v Itálii. Matematici tady byli tak okouzlení tímto poměrem, že byl nazýván božskou proporcí. Na Eukleidovy základy navazuje jeden z italských renesančních matematiků Luca Pacioli, vydáním knihy nazvané „*O božském poměru*“. Kniha byla vydána v roce 1509 a byla doprovázena ilustracemi jeho přítele Leonarda da Vinci. Kniha obsahuje nesmírně zajímavou sbírku příkladů výskytu zlatého řezu v rovinných obrázcích i tělesech. Pacioli ve své knize o zlatém řezu bez ustání básní a fantazíruje. Například po jednom vypočítává údajných třináct různých účinků „božské proporce“ a připojuje ke každému z nich také přívlastky jako „esenciální“, „jedinečný“, „vrcholný“. Leonardo da Vinci považoval zlatý řez za ideál krásy a harmonie.

O pár let později v roce 1528 německý malíř Albrecht Dürer ve svém spisu rozvinul některé teoretické problémy nauky o proporcích. I zde se objevuje řada zlatých řezů úseček a zlatých obdélníků.

Označení „zlatý řez“ a „zlatý poměr“ se začalo používat až v 19. století. V současné době, trochu i neprávem, teorie zlatého čísla ustoupila do pozadí. Francouz Matila Ghyka byl jeden z mála osobností, který se touto problematikou v 20. století zabýval. Ghyka vydal v roce 1931 knihu „*Le Nombre d'Or*“ (Zlaté číslo) a o něco v později v roce 1946 vyšla jeho další kniha „*The geometry of Art and Life*“ (Geometrie umění a života). V obou dílech se zabývá výskytem zlatého čísla v přírodě, architektuře, jeho vlastnostmi a využitím od starověkého Egypta, přes antiku až po současnost.

V současné době se zlatý řez používá v odvětvích jako planimetrie[2], stereometrie[3], fotografii, plastické chirurgii a v mnohých dalších odvětvích.

[2] Planimetrie je část geometrie pojednávající o vzájemných vztazích a vzdálenostech rovinných geometrických útvarů.
[3] Stereometrie či prostorová geometrie je geometrie v prostoru. Kromě prostorových útvarů se zabývá i vzájemnou polohou přímek, rovin, jejich zobrazení atd.

2. Zlatý řez v matematice

„Eukleides definoval proporci, již odvodil z obyčejného rozdělení úsečky způsobem, který označil jako rozdělení v „krajním a středním poměru“. Popsal to následovně:

Úsečka se rozdělí v krajním a středním poměru tehdy, když se celá má k delšímu dílu jako delší díl ke kratšímu.

Obr. 1: Úsečka v zlatém řezu

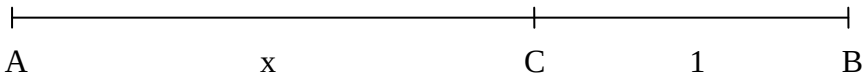
Jinými slovy, podíváme-li se na obrázek, pak úsečka AB je zjevně delší než její úsek AC, zároveň je část AC delší než CB. Je-li poměr délky AC k délce CB stejný jako AB k AC, pak byla úsečka rozdělena v krajním a středním poměru, tedy ve zlatém řezu.“[i]

Přesná hodnota zlatého řezu (poměr AC k CB) je číslo nekončícího a neperiodického desetinného rozvoje: 1,618 033 988 7…

Zlatý řez se nedá vyjádřit jako zlomek (jako racionální číslo). Znamená to, že zlomkem nelze vyjádřit poměr délek AC a CB, jinak řečeno, ať to zkoušíme jakkoliv, nedokážeme nalézt společné měřítko, které je obsaženo například 31 krát v AC a 19 krát v CB. Dvě takové délky bez společného měřítka se nazývají nesouměřitelnými. Objev zlatého řezu jako iracionálního čísla, byl zároveň i objevem nesouměřitelnosti.

2.1 Definice zlatého řezu a jeho číselná hodnota

Zlatým řezem se označuje rozdělení úsečky na dvě části tak, aby platilo, že poměr menší části k větší části bude ten samý jako poměr větší části k celé úsečce.



Berme do úvahy, že máme nějakou úsečku AB, na které leží bod C, předpokládejme, že délka kratší strany CB je jedna jednotka a délka delší strany AC je x jednotek. Z výše uvedené definice vyplývá, že pokud je poměr x (délka úsečky AC) k 1 (délka úsečky CB) stejný jako poměr x + 1 (délka úsečky AB) k x, pak bude tato úsečka rozdělená v zlatém poměru. To znamená, že platí:

$$|AC| : |CB| = |AB| : |AC|$$

$$x : 1 = (x + 1) : x$$

Jednoduchou úpravou dostaneme kvadratickou rovnici:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Řešením rovnice dostaneme:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988\ldots,\ x2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618033988\ldots$$

Protože jsme vypočítali poměr větší části k menší, musí vyjít poměr větší než 1, proto řešením naší úlohy je jen kladný kořen rovnice:

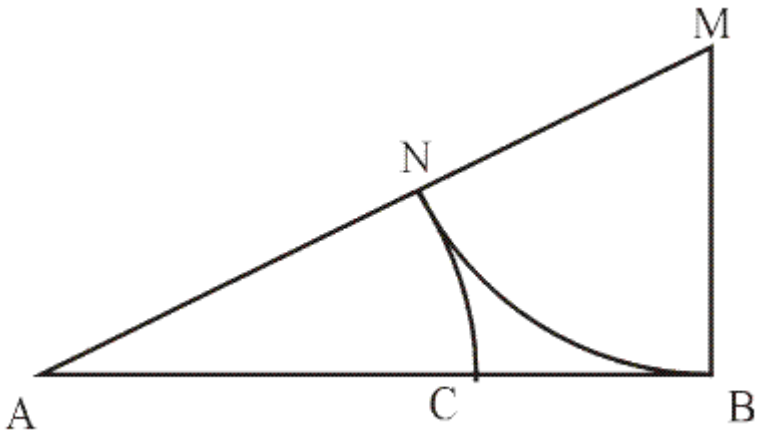
$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,618 033 988 7… Právě táto hodnota, často označovaná φ, je tedy hodnotou zlatého řezu.

Jako jsme už říkali je toto číslo iracionální a nedá se napsat konečným počtem cifer. Tady máme toto číslo rozepsané na 1024 desetinných míst:

1,6180339887 4989484820 4586834365 6381177203 0917980576
2862135448 6227052604 6281890244 9707207204 1893911374
8475408807 5386891752 1266338622 2353693179 3180060766
7263544333 8908659593 9582905638 3226613199 2829026788
0675208766 8925017116 9620703222 1043216269 5486262963
1361443814 9758701220 3408058879 5445474924 6185695364
8644492410 4432077134 4947049565 8467885098 7433944221
2544877066 4780915884 6074998871 2400765217 0575179788
3416625624 9407589069 7040002812 1042762177 1117778053
1531714101 1704666599 1466979873 1761356006 7087480710
1317952368 9427521948 4353056783 0022878569 9782977834
7845878228 9110976250 0302696156 1700250464 3382437764
8610283831 2683303724 2926752631 1653392473 1671112115
8818638513 3162038400 5222165791 2866752946 5490681131
7159934323 5973494985 0904094762 1322298101 7261070596
1164562990 9816290555 2085247903 5240602017 2799747175
3427775927 7862561943 2082750513 1218156285 5122248093
9471234145 1702237358 0577278616 0086883829 5230459264
7878017889 9219902707 7690389532 1968198615 1437803149
9741106926 0886742962 2675756052 3172777520 3536139362
1076738937 6455606060 5922...

2.2 Konstrukce zlatého řezu

Sestrojení zlatého řezu můžeme provést různými způsoby. Já jsem pro názornou ukázku vybral Herónovou[4] konstrukci, která se mi zdá nejjasnější.



Obr. 2: Konstrukce zlatého řezu

Nejprve narýsujeme pravoúhlý trojúhelník ABM tak, aby byl pravý úhel při vrcholu B a délka BM byla polovicí úsečky AB.

Pak sestrojíme kružnicí se středem v bodu M, s poloměrem BM a dostaneme bod N na úsečce AM.

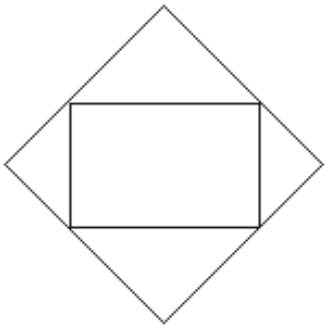
Nakonec sestrojíme kružnici se středem v bodu A, s poloměrem AN a dostaneme bod C na úsečce AB. Tento bod C rozdělí úsečku AB zlatým řezem.

2.3 Zlaté číslo v rovině

Poměr zlatého čísla můžeme často nalézt i v rovinné geometrii. Následně chci ukázat, že se vyskytuje v některých pravidelních mnohoúhelnících, aniž bychom jej tam úmyslně sestrojovali.

[4] Herón byl matematik, inženýr a vynálezce působící v Alexandrii, je považován za největšího experimentátora antiky. Herón se zabýval převážně trigonometrii, nejčastěji její praktickou aplikací vyměřoval pole a vinice.

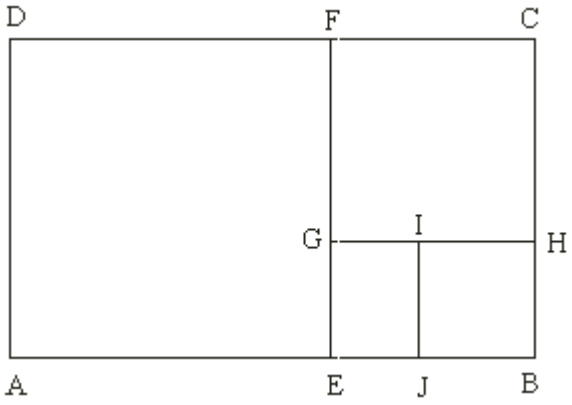
2.3.1 Zlatý obdélník



Je to obdélník, který má delší stranu ke kratší straně v poměru zlatého řezu. Tento obdélník má množství zajímavých vlastností.

Vepsáním zlatého obdélníku do čtverce nám všechny vrcholy obdélníku rozdělí strany čtverce v poměru zlatého řezu.

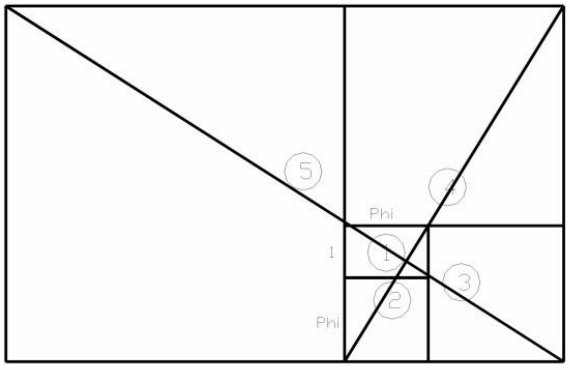
Obr. 3: Zlatý obdélník ve čtverci



Obr. 4: Zlaté obdélníky

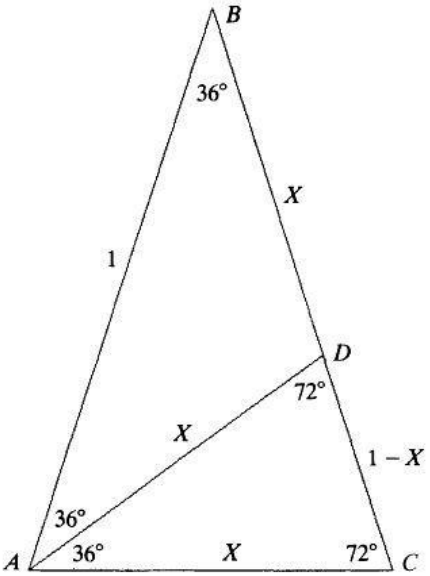
Máme zlatý obdélník ABCD. Oddělíme-li od tohoto obdélníku čtverec AEFD, dostaneme opět zlatý obdélník EBCF. Pak od vzniklého obdélníku oddělíme další čtverec GHCF, vzniklý obdélník bude rovněž jen zlatým obdélníkem. Opět pokračujeme oddělením dalšího čtverce JBHI, jehož výsledkem bude napotřetí zlatý obdélník. Rozměry „mateřského“ obdélníku jsou proti „dceřinému“ přesným násobkem φ. Budeme-li v tomto postupu pokračovat, budou vznikat stále menší a menší obdélníky pokaždé s rozměry sníženými φ krát. Kdybychom zkoumali tyto obdélníky pod stále silnějšími zvětšovacími skly, vypadaly by všechny stejně. Zlatý obdélník je jediným obdélníkem s vlastnostmi, kdy po oddělení čtverce, vzniká z něho podobný obdélník.

Na následujícím obrázku vidíme, jak se v rotujících obdélnících protínají dvě úhlopříčky ve stejném bodu. Úhlopříčky byly narýsované v libovolném páru mateřského a dceřiného obdélníku. Zmenšující se obdélníky konvergují právě do tohoto nikdy nedosažitelného bodu. Matematik Clifford A. Pickover o něm mluvil jako o „božím oku“.



Obr. 5: Zlaté obdélníky s úhlopříčkami

2.3.2 Zlatý trojúhelník



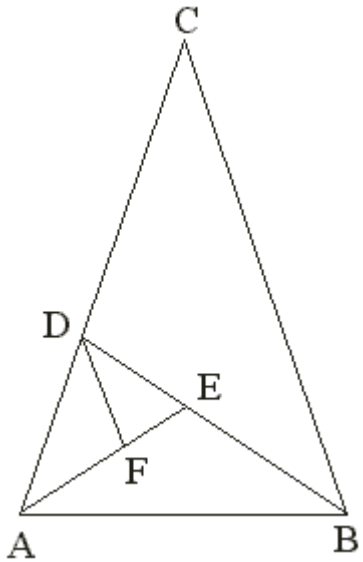
Obr. 6: Zlatý trojúhelník s úhly

Je to rovnoramenný trojúhelník, který má poměr strany ramena k základně rovný zlatému řezu.

$$|AB| / |AC| = \varphi$$

Při zlatém trojúhelníku jsou úhly při základně rovny 72° a úhel při vrcholu trojúhelníku je roven 36°.

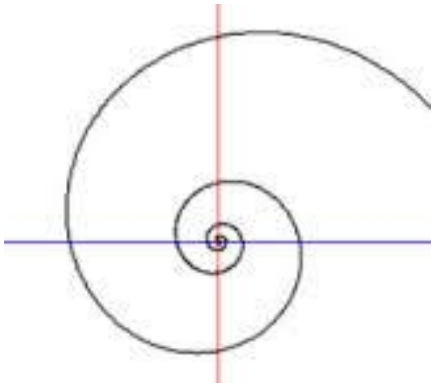
Zlatý trojúhelník má podobnou vlastnost jako zlatý obdélník. Pokud do daného zlatého trojúhelníku ABC vepisujeme největší možné rovnoramenné trojúhelníky, které mají rameno stejné velikosti základně předcházejícího trojúhelníku, opět platí, že dostaneme zlatý trojúhelník. Tento postup můžeme rovněž opakovat donekonečna.



Obr. 7: Zlaté trojúhelníky

Tyto trojúhelníky dostaneme i postupem, že 72° úhel při základně budeme rozdělovat vždy na polovici a tím pádem nám budou vznikat menší trojúhelníky rovněž v poměru zlatého řezu. Konkrétně nám po rozdělení vznikne 36° úhel trojúhelníku, který pak doplní zbylé dva 72° úhly.

2.3.3 Zlatá (logaritmická) spirála



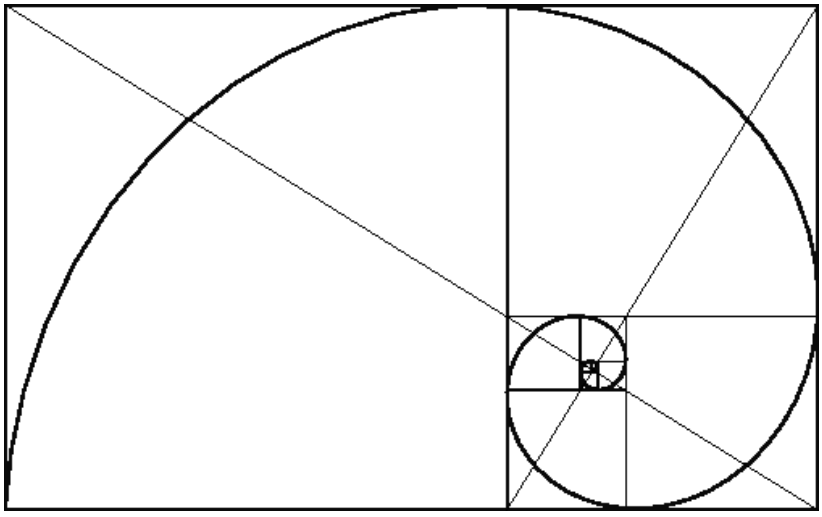
Obr. 8: Logaritmická spirála

S touhle tou spirálou byl úzce spjat matematik Jacques Bernoulli, který byl tak uchvácen nádherou této křivky, že žádal, aby tento tvar byl vytesán na jeho náhrobku.

Pojmenování logaritmická spirála je odvozené od způsobu prodlužování poloměru při vzdalování spirály od středu po směru hodinových ručiček.

Táto spirála má jedinečnou vlastnost, jakou nemá žádná jiná spirála. Se vzrůstající velikostí se její tvar nemění. Tento rys se nazývá soběpodobnost.

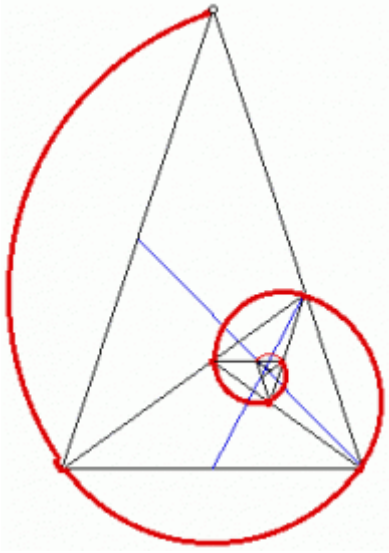
„Spirála vyrůstá hromaděním ze sebe, s růstem se rozšiřuje a vzdálenost mezi jejími „závity“ se prodlužuje s tím, jak se křivka vzdaluje od svého počátku, takzvaného pólu. Otáčení pod stále stejným úhlem tak zvyšuje vzdálenost spirály od pólu ve stejných poměrech. Kdybychom měli s pomocí mikroskopu opticky zvětšit pouhému oku neviditelné závity na velikost obrázku, pak by závity do této větší spirály přesně zapadly.



Obr. 9: Spirála v obdélnících

Logaritmická spirála a zlatý řez jdou ruka v ruce. Prozkoumejme opět sled do sebe vložených zlatých obdélníků, získaných tím, že od původních obdélníků oddělujeme čtverce. Spojíme-li po sebe následující body, kde tyto rotující čtverce dělí ve zlatém řezu strany obdélníků, dostaneme logaritmickou spirálu, která se zavíjí dovnitř směrem k pólu (bod, kde se protnou úhlopříčky mateřského a dceřiného obdélníku).“[ii]

„Logaritmickou spirálu můžeme rovněž vytvořit ze zlatého trojúhelníku. Jak je výše uvedeno, rozdělením úhlu u základny zlatého trojúhelníku na polovinu, dostaneme menší, také zlatý trojúhelník. Když budeme v tomto půlení úhlů pokračovat, vytvoříme sérii rotujících trojúhelníků. Postupným spojením vrcholů jednotlivých zlatých trojúhelníků vznikne opět logaritmická spirála, stejně jako u zlatého obdélníku.



Obr. 10: Spirála v trojúhelnících

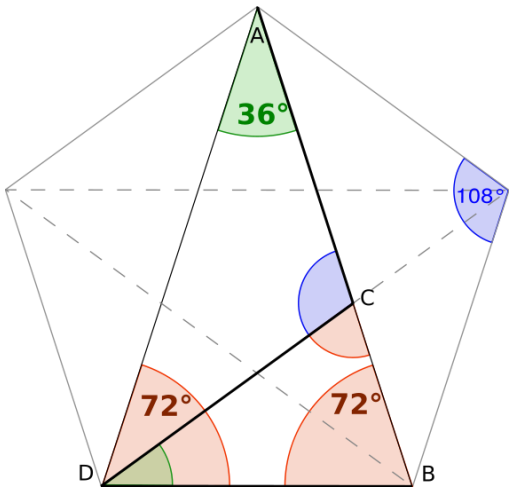
Logaritmická spirála se také označuje jako ekviangulární (rovnoúhlá) spirála. Označení „ekviangulární“ odráží další jedinečnou vlastnost logaritmické spirály. Narýsujeme-li úsečku od pólu k jakémukoli bodu na této křivce, rozdělíme křivku vždy ve stejném úhlu.“[iii]

2.3.4 Zlatý úhel

Zlatým úhlem je v geometrii úhel, který rozděluje kruh na dva úhly, pro které platí, že poměr většího úhlu k menšímu se rovná poměru celého kruhu k většímu úhlu. Po výpočtu vyjde tento úhel 137,5°.

$360°/\varphi = 222{,}5°$ $\quad 360° - 222{,}5° = \underline{137{,}5°}$

2.3.5 Pravidelní pětiúhelník

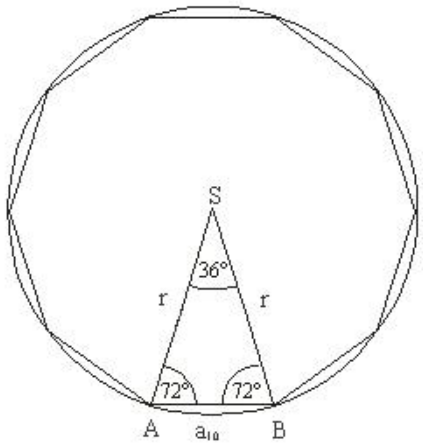


Obr. 11: Pětiúhelník

Pravidelný pětiúhelník se zařazuje do skupiny pravidelných mnohoúhelníků. Délky jeho všech stran a velikosti jeho vnitřních uhlů jsou tedy shodné. Také mu můžeme opsat a vepsat kružnici. Pětiúhelník je jediný mnohoúhelník se stejným počtem stran a úhlopříček. Nás, ale hlavně zajímají vlastnosti týkajícího se zlatého řezu, kterých má pětiúhelník opravdu mnoho.

Každý úhel pětiúhelníku má 108 stupňů. Po nakreslení dvou sousedících úhlopříček do pětiúhelníků, jak je to na obrázku, se nám vytvoří tři rovnoramenné trojúhelníky. Protože oba úhly při základně trojúhelníků jsou shodné, mají základnové úhly dvou trojúhelníků po stranách po 36 stupních. Pro úhly prostředního trojúhelníku tím dostaneme hodnoty 36, 72, 72, což z výše uvedeného textu víme, že jde o zlatý trojúhelník. V pravidelném pětiúhelníku se poměr úhlopříčky a strany pětiúhelníku rovná zlatému číslu.

„To vše názorně ilustruje, že pokud dokážeme sestrojit úsečku rozdělenou ve zlatém poměru, máme tím zároveň jednoduchý prostředek k vytvoření pravidelného pětiúhelníku. A právě sestrojení pětiúhelníku bylo hlavním důvodem zájmu Řeků o zlatý řez. Trojúhelník uprostřed obrázku pětiúhelníku s poměrem strany k základně v hodnotě φ se nazývá zlatý trojúhelník, dva trojúhelníky po stranách, kde poměr strany k základně je 1/φ se někdy označují jako zlaté gnómony.“[iv] Dále v pravidelném pětiúhelníku platí, že průsečík dvou úhlopříček dělí každou z nich ve zlatém poměru. Pokud sestrojíme všechny úhlopříčky pětiúhelníku, dostaneme pěticípou hvězdu – pentagram, v středě kterého dostaneme opět pravidelný pětiúhelník. Poměr stran původního a nového pětiúhelníku je druhá mocnina zlatého řezu. U tohoto pentagramu platí, že všechny jeho cípy jsou zlatými trojúhelníky.



Obr. 12: Desetiúhelník

2.3.6 Pravidelný desetiúhelník

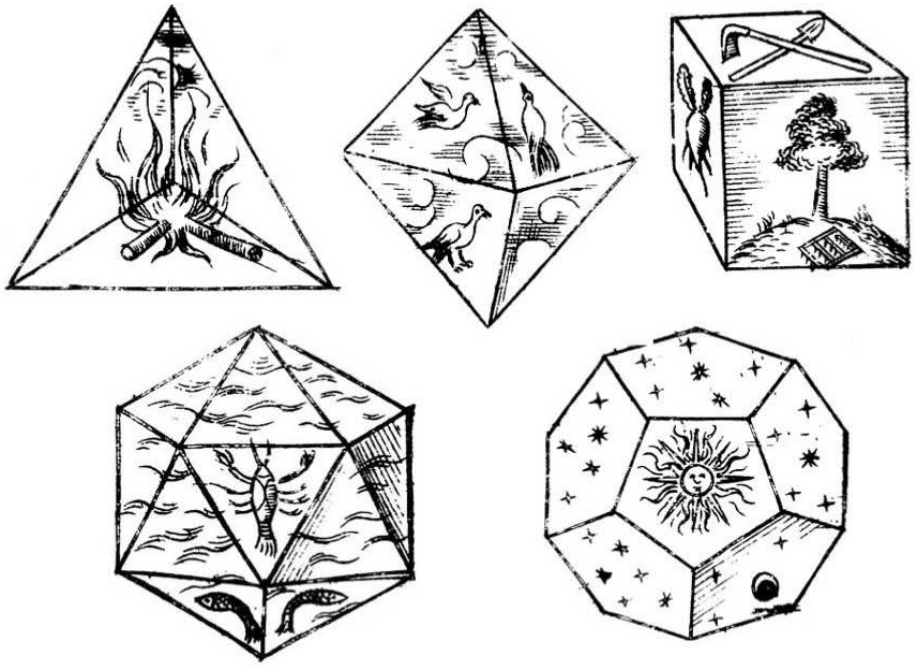
Když pospojujeme všechny vrcholy desetiúhelníku se středem, dostaneme deset pravoúhlých trojúhelníků. Asi nás nepřekvapí, že všechny tyto trojúhelníky budou zlatými trojúhelníky.

2.4 Zlatý řez v prostoru

2.4.1 Platónské tělesa

Platón byl řecký filozof, který žil asi v letech 428 – 347 př. n. l. Měl velmi blízko i k matematice. „Snažil se vysvětlit strukturu hmoty za pomoci pěti pravidelních těles (mnohostěnů), které již do určité míry zkoumali pythagorejci a po nich velmi důkladně Theaitetos. V trojrozměrném prostoru je jich právě pět. Těchto pět platónských těles se vyznačuje následujícími vlastnostmi: jsou to jediná tělesa, jejichž stěny jsou totožné a rovnostranné, kolem každého z těles je možné opsat kouli (na které leží všechny vrcholy tělesa). Platónskými tělesy jsou: čtyřstěn (se čtyřmi stěnami tvaru trojúhelníku), krychle (s šesti čtvercovými stěnami), osmistěn (s osmi trojúhelníkovými stěnami), dvanáctistěn (s dvanácti stěnami o tvaru pětiúhelníku) a dvacetistěn (s dvaceti stěnami ve tvaru trojúhelníku)

Platón propojil Empedoklovy představy, podle nichž čtyřmi základními látkami jsou země, voda, vzduch a oheň, s „atomickou“ teorií hmoty Demokrita z Abdér. Jeho teorie říká, že každý z těchto čtyř elementů odpovídá jinému druhu základní částice a je představován jedním z platónských těles.“[v]

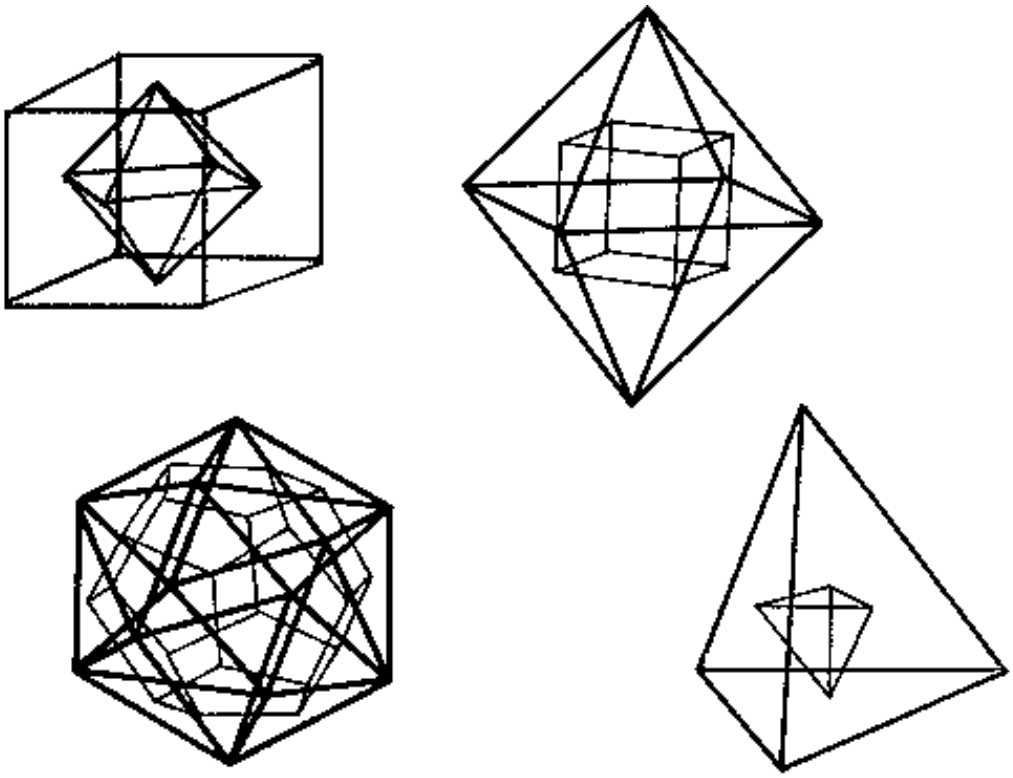


Obr. 13: Platónské tělesa

Podle Platóna zemi ztělesňuje krychle, která se vyznačuje stabilitou, špičatý a relativně jednoduchý čtyřstěn zastupuje „všepronikající“ rys ohně, vzduch je reprezentován „pohyblivým“ vzhledem osmistěnu a vodu symbolizuje mnohotvárný dvacetistěn. Páté těleso, dvanáctistěn, připisoval Platón vesmíru jako celku, podle jeho slov byl právě dvanáctistěn tou formou, kterou „bůh použil, aby souhvězdími protkal celou oblohu“.

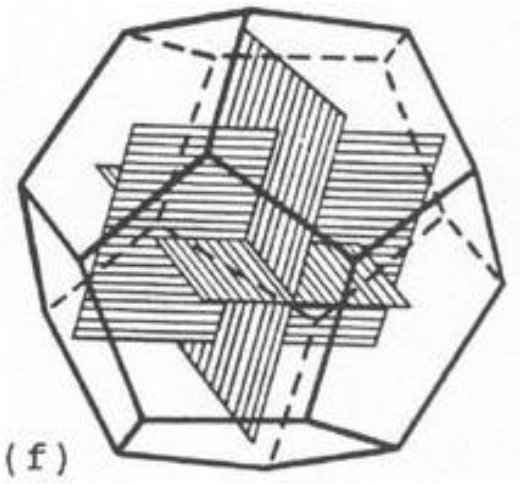
Platónské tělesa jsou pro nás z hlediska zlatého řezu velmi zajímavé. Na některých z nich najdeme zlatý poměr ve velmi velkém zastoupení. V minulosti se proporcemi zlatého řezu na platónských tělesech zabýval především italský mnich Luca Paciaoli.

2.4.1.1 Duální mnohostěny



Obr. 14: Duální mnohostěny

Podobnosti v symetrii platónských těles nám umožňují nahlédnout do zajímavého zobrazování jednoho tělesa ve druhém, které je jeho zdvojením nebo obdobou. Spojením všech středů stěn krychle, nám vznikne osmistěn a naopak, spojením všech středů stěn osmistěnu získáme opět krychli. Je to způsobeno tím, že krychle i osmistěn mají stejný počet hran (dvanáct), ale počet stěn a vrcholů mají prohozený (krychle má šest stěn a osm vrcholů, osmistěn tvoří osm stěn a šest vrcholů). Podobné zobrazení nám vznikne i u zakreslení dvacetistěnu do dvanáctistěnu a naopak. Pravidelný čtyřstěn je duální sám do sebe.

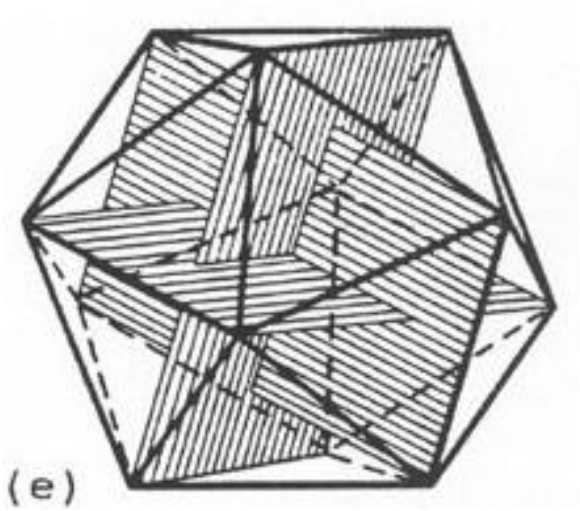


Obr. 15: Dvanáctistěn

2.4.1.2 Dvanáctistěn

Přítomnost zlatého čísla na tomto tělese nám zaručuje už jen to, že stěny dvanáctistěnu jsou tvořeny pětiúhelníky.

Toto těleso má ale i další zajímavou vlastnost, můžeme do něj vepsat tři navzájem kolmé zlaté obdélníky, přičemž jejich vrcholy budou ležet ve středech stěn dvanáctistěnu.



Obr. 16: Dvacetistěn

2.4.1.3 Dvacetistěn

U dvacetistěnu jsou stěny tvořeny rovnostrannými trojúhelníky. Ty nám bohužel, žádnou spojitost se zlatým řezem neukazují. Když se ale podíváme na všechny trojúhelníky, které se stýkají v jednom vrcholu, všimneme si, že jejich protilehlé strany leží v jedné rovině a tvoří pětiúhelník. A zlaté číslo se objevilo.

Dále pro dvacetistěn platí, že spojením dvou protilehlých stran nám vznikne zlatý obdélník. Odsud nám vyplývá, že 12 vrcholů tělesa nám současně tvoří 12 vrcholů tří zlatých obdélníků, které leží ve třech navzájem kolmých rovinách. Jejich jediným společným bodem je střed dvacetistěnu.

2.4.1.4 Osmistěn

I zde u pravidelného osmistěnu se dopracujeme k jedné zajímavé vlastnosti. Je do něj možné vepsat pravidelný dvacetistěn tak, že každý vrchol dvacetistěnu rozdělí hrany osmistěnu v poměru zlatého řezu.

2.5 Fibonacciho čísla

Leonardo Fibonacci, vlastním jménem Leonardo Pisánský, byl italským matematikem. Pro dějiny zlatého řezu je Fibonacciho přínos opravdu ohromný. Fibonacci pozvedl používání vlastností zlatého řezu v různých geometrických aplikacích na vyšší úroveň. Nejpůsobivější a nejznámější Fibonacciho příspěvek k teorii zlatého řezu však vychází z jedné nevinné úlohy.

2.5.1 Úloha s králíky

„Jeden muž umístil pár králíků do prostoru obehnaného ze všech stran zdí. Kolik párů králíků vznikne z tohoto páru, předpokládáme-li, že každý pár zplodí každý měsíc nový pár, který začne plodit potomky druhý měsíc od narození?

Obr. 17: Schéma s králíky

Řešení úlohy:

Na obrázku představuje jeden velký králík dospělý pár a jeden a jeden malý králík mladý pár. Začínáme s jedním párem. První měsíc se narodil prvnímu páru nový pár, jsou tedy dva páry. Po druhém měsíci zplodí dospělí králíci nový pár a první mladý pár dospěje. Máme tedy tři páry. Po třetím měsíci bude mít každý ze dvou dospělých párů další pár, a zároveň dospěje dětský pár, takže máme celkem již pět párů. Po čtvrtém měsíci zplodí dva potomky každý ze tří dospělých párů, dospějí dva nejpozději narozené páry a tak budeme mít celkově osm párů. Za pět měsíců vzejdou nové mladé páry z každého z pěti dospělých párů, což spolu se třemi dospívajícími dvojicemi dává již 13 párů. A tak postupujeme dál a dál, tudíž v každém daném měsíci se počet dospělých párů rovná součtu dospělých párů se dvou předcházejících měsíců. Počet dospělých párů tak sleduje tuto posloupnost: 1, 1, 2, 3, 5, 8… Tato posloupnost se týká i mladých králíků, jen je posunuta o jeden měsíc. Počty dětských páru jdou za sebou tedy takto: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8…

Posloupnost 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…, kde každý člen je součtem dvou předcházejících členů se nazývá Fibonacciho posloupnost.“[vi]

Pomocí rekurentního vzorce se vyjadřuje takto: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

F_n znamená n-té číslo posloupnosti (např. F_5 je pátým členem), F_{n+1} je člen následující za F_n (pro n = 5, n+1 = 6) a F_{n+2} je člen následující za F_{n+1}.

Tato Fibonacciho posloupnost se zdaleka neomezuje jen na rozmnožování králíků, ale platí například i pro optiku, stoupání po schodech či rodokmeny trubců.

Co má ale tato posloupnost společného se zlatým řezem si řekneme následovně.

Přehlédneme si znovu Fibonacciho posloupnost: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987…, a tentokrát si všimneme poměrů dvou po sebe bezprostředně následujících čísel.

1/1 = 1,000 000
2/1 = 2,000 000
3/2 = 1,500 000
5/3 = 1,666 666
8/5 = 1,600 000
13/8 = 1,625 000
21/13 = 1,615 385
34/21 = 1,619 048
55/34 = 1,617 647
89/55 = 1,618 182
144/89 = 1,617 978
233/144 = 1,618 056
377/233 = 1,618 026
610/377 = 1,618 037
987/610 = 1,618 033

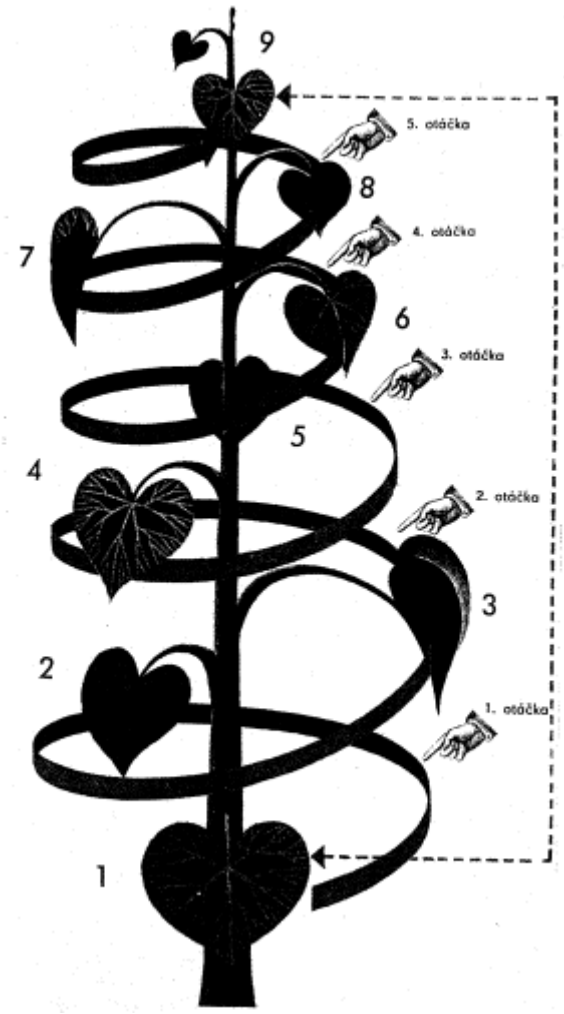
Jak je vidět, poslední číslo se už hodně podobá hodnotě zlatého řezu. Poměr dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel osciluje kolem hodnoty zlatého řezu a s dalším a dalším členem Fibonacciho posloupnosti je mu stále blíže (jednou je větší a jednou menší). Označíme-li n-té Fibonacciho číslo jako $F_{n'}$ zjistíme, že poměr F_{n+1}/ F_n se blíží φ s tím, jak se n zvětšuje.

3. Zlatý řez v přírodních vědách

Příroda nám vystavuje na odiv nesmírné množství překrásných tvarů a neskutečných forem. Rostliny, stromy, hmyz, ryby, psy, kočky, koně, pávy, veškerá tato stvoření na nás působí poetickou souhrou symetrie a asymetrie. V mnoha z těchto věcí je obsažený právě zlatý řez. Se zlatým číslem se v přírodě setkáváme, aniž bychom si to uvědomovali. Je naší neoddělitelnou součástí.

3.1 Fylotaxe

Listy na stonku rostliny nebo větvičky na větvi mají sklon růst tak, aby byly co nejvýhodněji postaveny k působení slunečních paprsků, deště a vzduchu. Listy na stonku jsou vytvářeny ve zcela pravidelném rozmístění. Listy však nevyrůstají přímo jeden nad druhým, protože by spodní listy byly ochuzené o potřebnou vláhu a sluneční louče. Přechod od jednoho listu k dalšímu, nebo jedné větvičky k další má charakter šroubovitého výstupu kolem stonku. Podobné uspořádání opakujících se částí můžeme najít taky u šupin borovicové šišky, semen slunečnice nebo u kůry ananasu. Tento jev se nazývá fylotaxe (z řeckého – uspořádaní listů). Tento termín zavedl v roce 1754 švýcarský přírodovědec Charles Bonnet.



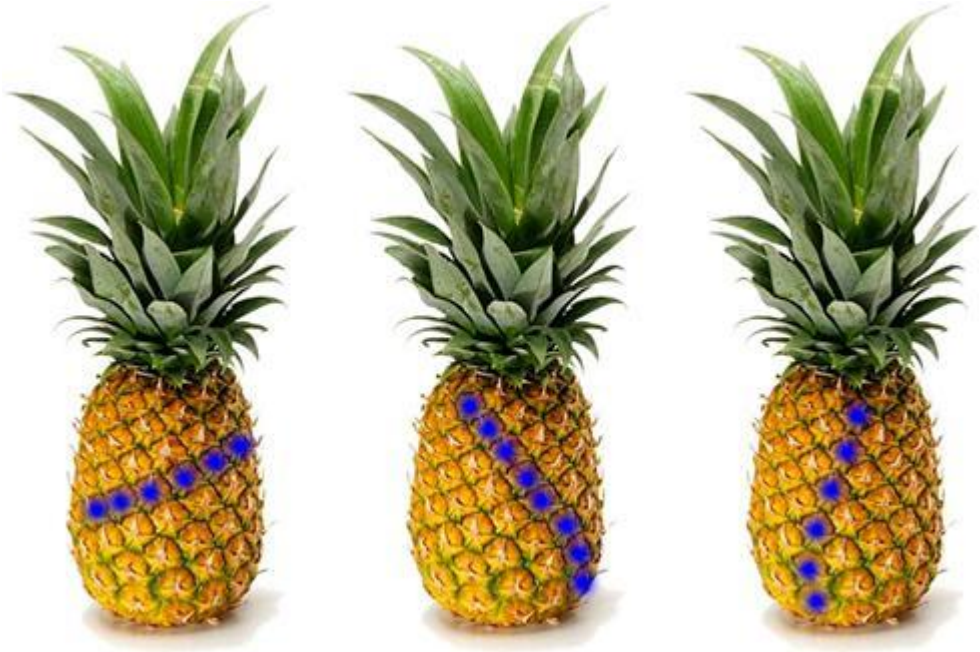
Obr. 18: Fylotaxe

U každé rostliny je poměr uspořádání listů trochu jiný. U lípy se například listy vyskytují většinou na dvou protilehlých stranách, což odpovídá jednomu listu na jednu polovinu otáčky kolem větvičky a označuje se to jako 1/2 fylotaktického poměru. Dále u jiných rostlin, například u lísky, ostružiny a buku vyrůstají listy vždy po 1/3 obrátky. Jabloně, pobřežní živé duby a meruňka mají listy po každých 2/5 jedné otočky spirály. U hrušně a smuteční vrby je zase tento poměr 3/8.

Dá se už teď vypozorovat, že všechny tyto zjištěné zlomky jsou poměry jednoho členu Fibonacciho posloupnosti k jinému, který se nachází v řadě za ním o dvě místa dál. Prvním, který vypozoroval skutečnost, že se listy řídí podle nějakého schématu, byl již ve starověku Theofrastos. Pak výzkum fylotaxe příliš daleko nepokročil až do 15. století, kdy Leonardo da Vinci zpozoroval, že listy bývají rozmístěny do spirál. Prvním, který objevil vztah mezi fylotaxií a Fibonacciho čísly, byl astronom Johannes Kepler. Zásadní výzkum fylotaxe byl ale zahájený až v 18. století Charlesem Bonnetem. Bonnet ve spolupráci s Calandrinim také objevil, že u některých rostlin, například u šupin jedlových šišek nebo ananasu, se objevují série druhotných spirál (tzv. parastichy).

Historie skutečné matematické fylotaxe začíná 19. století pracemi botanika Karla Friedricha Schimpera, jeho přítele krystalografa Alexandra Brauna a jeho bratra, botanika Louise. Tito badatelé nalezli obecné pravidlo, podle něhož se dají fylotaktické poměry vyjádřit jako poměry členů Fibonacciho posloupnosti.

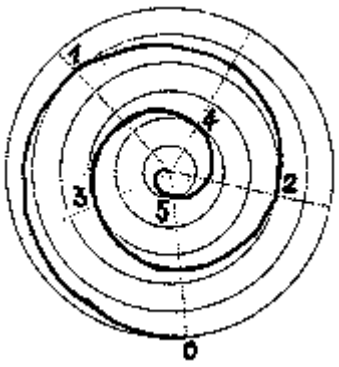
Skutečně nádherný příklad fylotaxe založené na Fibonacciho číslech můžeme vidět na kůře ananasu. Každý jeden šestiúhelníkový dílek na povrchu ananasu je součástí tří různých spirál.



Obr. 19: Fylotaxe u ananasu

Jedna z osmi rovnoběžných řad má mírný sklon vzhůru při pohledu zleva doprava, jedna ze 13 rovnoběžných řad má strmější sklon vzhůru zprava doleva a jedna z 21 velmi strmých řad směruje téměř kolmo vzhůru. Všechna tato čísla jsou čísly Fibonacciho posloupnosti.

Při pohledu na stonek rostliny shora si můžeme všimnout, že dříve vyrostlé listy, které jsou na spodu, mají tendencí být paprskovitě dále od středu stonku a listy směrem k vrcholu stonku, jsou čím dále tím blíž u stonku. List číslo 0 z obrázku, vyrostl jako první a list číslo 5 jako poslední. Když si představíme křivku, která spojuje listy 0 až 5, můžeme si všimnout, že se listy nacházejí na hustě vinuté spirále, takzvané genetické spirále. Pro umístění listů je velmi typickým znakem úhel mezi spojnicemi středu stonku a následných listů.



Obr. 20: Rozložení listů

Bratři Bravaisové mimo jiného také objevili, že nové listy na všech rostlinách vyrůstají zhruba ve stejném úhlu. Tento úhel se obvykle blíží hodnotě 137,5, tedy úhlu, který dělí celou otočku 360° v poměru zlatého řezu. Tento úhel je někdy nazýván i zlatým úhlem. Německý matematik G. Van Iterson ve svém díle z roku 1907 ukázal, že když těsně seskupíme po sobě jdoucí body, které se vydělují na hustě vinuté spirále v úhlech 137,5 stupně, pak spatříme dvě skupiny spirál. Jedna skupina bude rotovat po směru hodinových ručiček a druhá bude rotovat opačným směrem. V obou těchto skupinách mají počty spirál tendenci být následnými Fibonaciho čísly. Čili poměry těchto čísel se blíži zlatému řezu.

Takto opačně směrující spirály se nejvíc zjevují v uspořádání semínek slunečnic nebo sedmikrásek. Semínka slunečnice rostou tak, aby co nejefektivněji využily horizontálního prostoru květu. Počty spirál závisejí většinou na velikosti slunečnice. Nejobvyklejším případem je 34 spirál mířicích jedním směrem a 55 spirál opačným směrem. Našli se ale i slunečnice s poměry počtů spirál 89/55, 144/89 a dokonce 233/144. Všechny tyto poměry jsou samozřejmě poměry po sobě následujících Fibonacciho čísel.

Obr. 21: Slunečnice

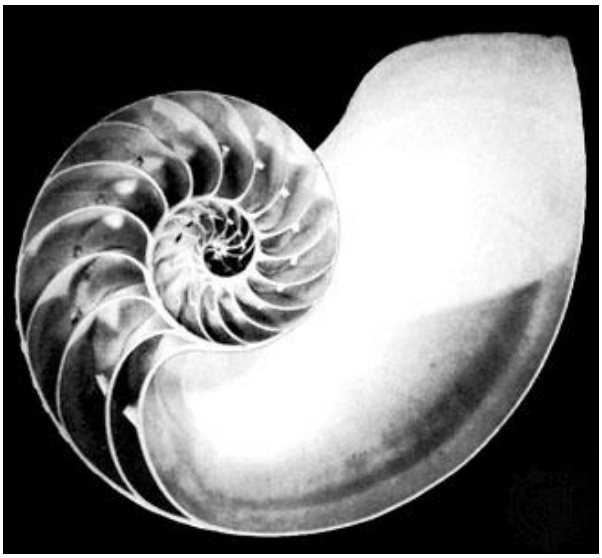
Zkrátka, když se zeptáme na otázku: „Proč je ve většině případů řazení listů oddělené právě zlatým úhlem 137,5?“ Odpověď je lehká. Toto uspořádání listů je nejefektivnější ze všech možných uspořádání. Tento divergenční úhel ve zlatém řezu zajišťuje, že pupeny se neseskupí podél žádného specifického paprskovitého směru, takže celý prostor vyplní maximálně efektivně.

3.2 Logaritmická spirála v přírodě

Jako jsem už zmínil dříve v matematické části, logaritmickou spirálu charakterizuje jedinečná vlastnost, kterou má jenom logaritmická spirála – se vzrůstající velikosti se její tvar nemění.

Příroda nachází v logaritmické spirále velké zalíbení. Její přítomnost lze spatřit v celé škále jevů od slunečnic, tvarů ulit, u kaktusů a vodních vírů, po hurikány a obří spirální galaxie, skoro to vypadá, jako by si příroda právě tento tvar vybrala za svůj oblíbený „ornament“. Stálý tvar logaritmické spirály na všech úrovních velikosti se nádherně projevuje například ve tvaru miniaturních fosílií jednobuněčných organismů nazývaných foraminifery neboli dírkonošci.

Krásný příklad logaritmické spirály najdeme u skořápky loděnky. Tato loděnka staví stále větší a větší komůrky a uzavírá menší, které již nepoužívá. Každý jeden přírůstek délky skořápky je doprovázen poměrným zvětšením jejího poloměru, takže celkový tvar zůstává nezměněn. Loděnka tak má po celý život v podstatě stále stejný tvar svého těla.



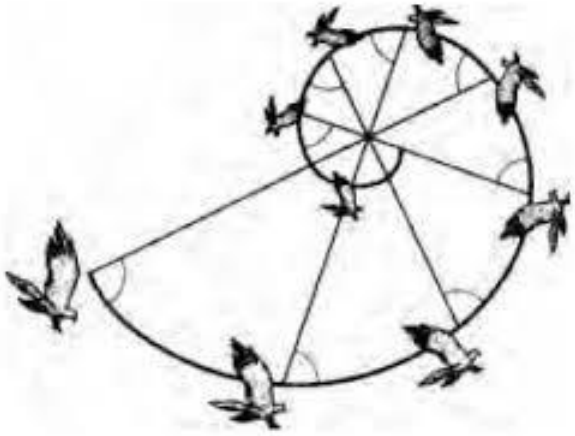
Obr. 22: Loděnka

Obr. 23: Africký kudu

Tato spirála se vyskytuje kromě schránek měkkýšů i u jiných neživých částí různých živočichů. Můžou to být vlasy, nehty, zobáky, zuby, rohy, parohy i například sloní kly.

Logaritmická spirála má ještě jednu geniální vlastnost. Narýsujeme-li úsečku od pólu k jakémukoli bodu na této křivce, rozdělíme křivku vždy ve stejném úhlu.

Tuto vlastnost používají například sokoli při útoku na kořist. Mezi nejrychlejší ptáky na Zemi patří právě sokoli stěhovaví, kteří na vyhlédnuté cíle létají rychlostí až přes 300 kilometrů za hodinu. Mohli by však létat ještě rychleji, pokud by se na své oběti pouštěli střemhlav a nesledovali by spirálovou dráhu. To ale není možné, protože ptáci mají oči po stranách hlavy, a aby mohli využít výhody ostrého zraku, museli by mít hlavu otočenou o 40 stupňů na jednu či druhou stranu. To by je ale výrazně zpomalovalo. Podle výzkumu sokoli drží při letu dolů hlavu zpříma a sledují přitom logaritmickou spirálu. Díky rovnoúhlé vlastnosti této spirály jim tato dráha umožňuje neustále sledovat cíl, a to při maximální možné rychlosti.



Obr. 24: Lov sokola

Tvar logaritmické spirály mají i mnohé vesmírné galaxie, jednou z nich je i naše mléčná dráha. Spirální galaxie jsou relativně tenkým diskem, složeným z plynu, prachu a hvězd. Celý tento galaktický disk rotuje kolem galaktického jádra. Spirální galaxie jsou tvořeny spirálními rameny, která vycházejí z blízkosti galaktického jádra a vedou ven přes většinu disku.

Obr. 25: Spirálové galaxie

3.3 Fí v lidském těle

Zlatý řez se očividně projevuje i na lidském těle. Harmonické proporce zlatého řezu se dají najít jak v anatomii lidského těla, tak i v životních cyklech člověka. Například tři články každého našeho prstu jsou k sobě ve zlatém poměru a zápěstí rozděluje ve zlatém řezu ruku s prsty od předloktí. Fibonacciho čísla můžeme potkat i u počtu zubů, když si uvědomíme, že za život se nám v každé čtvrtině chrupu vystřídá 13 a to v dětství 5 a v dospělosti 8.

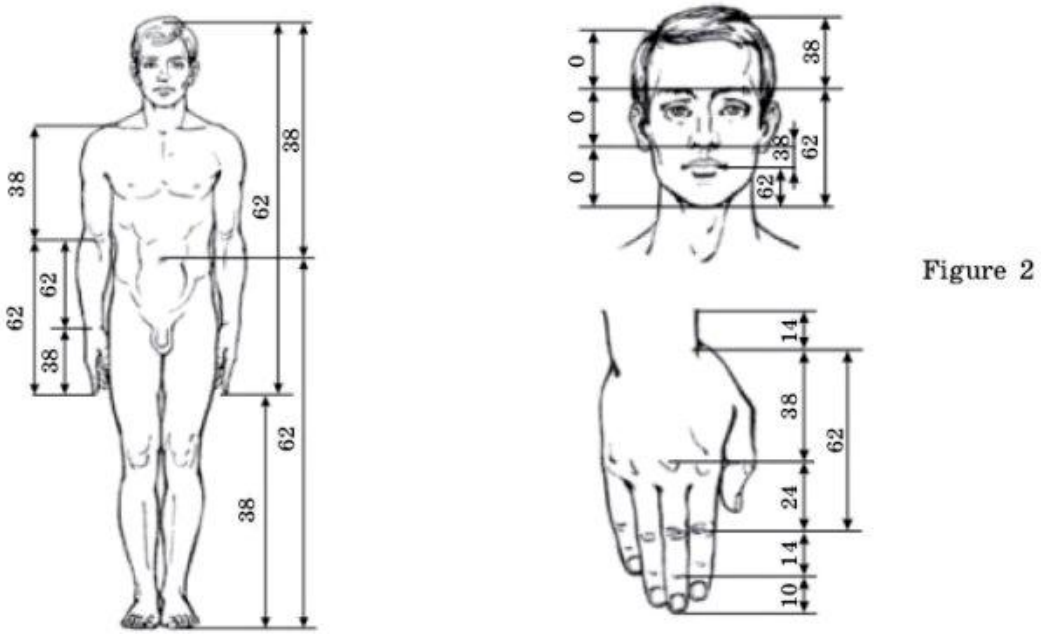


Figure 2

Obr. 26: Fí v lidském těle

4. Zlatý řez v umění

Pro lidské oko jsou tvary užívající zlatý řez krásné. Není úplně zřejmé, proč tomu tak je, avšak i bez teoretického vysvětlení ho umělci velmi rádi využívají. Jde především o malířství, architekturu, fotografii a sochařství.

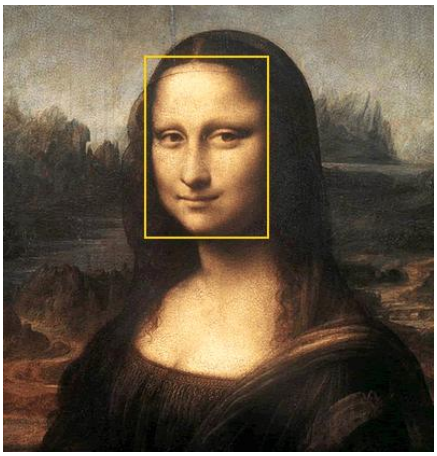
V dějinách zlatého řezu představovala renesance významný přelom, z důvodu že se celý koncept právě tehdy přestal orientovat pouze na matematiku. Od toho času začal zlatý řez přispívat k vysvětlování přírodních jevů a nacházet si místo i v umění. Už jsme se setkali s tvrzeními, podle kterých byly na zlatém řezu založené návrhy velkých staveb, jakými jsou Velká pyramida nebo Parthenon. Po podrobnějších prověřeních se ale odhalilo, že u většiny případů užití zlatého řezu s určitostí prokázat nelze. Na to, jak to bylo se zlatým řezem u výtvarníků, se podíváme teď.

4.1 Výtvarné umění

Obr. 27: Ognissanti Madonna

O malbě *Ognissanti Madonna*, jedné z největších maleb slavného italského malíře a architekta Giotta di Bondoneho se říká, že kolem celé malby jako i kolem jejich dvou ústředních postav lze opsat zlaté obdélníky. Podobná tvrzení se objevují i o dalších dvou dílech s podobným námětem. Jedná se o díla *Madonna Rucellai* od malíře Duccia di Buoninsegni a o obraz *Santa Trinita Madona* od florentského umělce Cenniho di Pepa. Rozměry těchto madon dávají poměry výšky k šířce postupně 1,59, 1,55, 1,73. I když všechna tato čísla nejsou nijak daleko od zlatého čísla, dvě z nich jsou blíže spíše jednoduchému poměru 1,6 než fi. Z toho můžeme usoudit, že o záměrné použití zlatého řezu v tomto případě nešlo.

Dalším jménem, které se neustále objevuje v spojitosti se zlatým řezem, je jméno Leonardo da Vinci. Obvykle se mluví o jeho pěti dílech – nedokončeném plátně *Svatý Jeroným*, dvou verzí *Madony ve skalách*, kresbě „hlavy starce“ a slavné *Mony Lisy*.



Obr. 28: Mona Lisa

Tvrdí se, že kolem tváře Mony Lisy se dá zkonstruovat zlatý obdélník. Táto myšlenka je ale jen další příležitostí ke zkoumání pravdivosti. Případ dvou verzí Madony ve skalách nijak obzvlášť přesvědčivý také není. Jedna malba má poměr výšky k šířce 1,64 a druhá 1,58, oba poměry jsou sice poměrně blízko φ, ale také jsou celkem blízko jednoduchému poměru 1,6. První verze Madony ve skalách byla dokončena asi deset let předtím, než měl Leonardo příležitost dozvědět se o „božské proporci“ přímo od zdroje. Tento názor použití zlatého řezu v této malbě je tedy založený na předpokladu, že si Leonardo osvojil tuto proporci ještě předtím, než začal spolupracovat s Paciolim. Bylo by to zvláštní, ale ne nemožné.

Obr. 29: Madona ve skalách

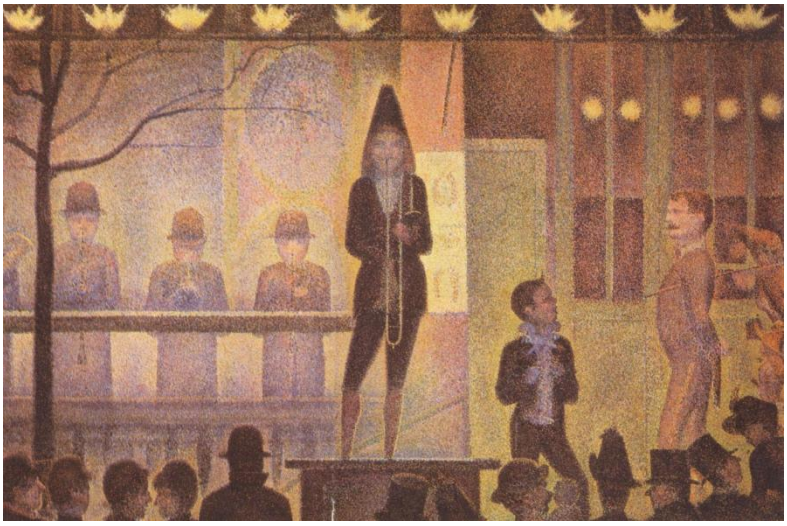
U jeho nedokončeného díla *Satého Jernýma* je to s dokazováním zlatého řezu velmi podobné.

Posledním příkladem kresby, kde mohl Leonardo využít zlatý řez je „hlava starce“. Tato kresba se nejvíce blíží důkazu, že Leonardo mohl ve svých dílech používat aplikaci zlatého řezu. Je minimálně bezpochyby jasné, že Leonardo se opravdu pečlivě zajímal o různé proporce tváře, a že k určování rozměrů svých maleb používal různé obdélníky.

Obr. 30: Svatý Jeroným

Obr. 31: „hlava starce“

Dalším umělcem, o kterém se tvrdí, že používal ve svých dílech zlatý řez, byl francouzský pointilista Georges Seurat. Stoupenci zlatého řezu často předkládají jeho obraz *Vystoupení*, jako „důkaz“ toho, jak se v umění využívá φ. Dokonce autor jedné knihy tvrdí, že Seurat „atakoval každé plátno zlatým řezem.“ Po pozdějších různých analýzách jeho děl byly dokonce i od takového zastánce zlatého řezu jakým byl Charles Bouleau, tato tvrzení vyvrácená.



Obr. 32: Vystoupení

Prvním význačným výtvarníkem, který zlatý řez z velké pravděpodobnosti při svých dílech využíval, byl Paul Sérusier. Sérierův zájem o zlatý řez byl podle všeho spíše filozofický než praktický, ale je dokázané, že u některých svých děl zlatý řez přece jen použil.

Jeho koncept zlatého řezu se prosadil i u dalších výtvarných směrů, především u kubistů. Někteří ranní kubisté dokonce uspořádali výstavu s názvem „Section d′Or“ (Zlatý řez). Na této výstavě shodou okolností ale nebyl vystavený žádný obraz s kompozicí zlatého řezu, tento název měl mít zjevně jiný význam. Nicméně někteří kubisté, například původem španělský malíř Juan Gris a sochař pocházející z Litvy Jacques Lipchitz v pozdějších dílech skutečně zlatý řez použili. Například v jejich společné soše *Harlekýna*, vytvořené s pomocí proporcí Keplerova trojúhelníku, založeného na zlatém řezu.

Obr. 33: socha Harlekýna

Dalším výtvarníkem, který ve svém díle na počátku 20. let 20. století aplikoval zlatý řez, byl italský malíř Gino Severini. Severini se snažil o geometrickou dokonalost a aplikaci zlatého řezu použil v přípravních kresbách hned několika obrazům, například v obraze *Mateřství.*

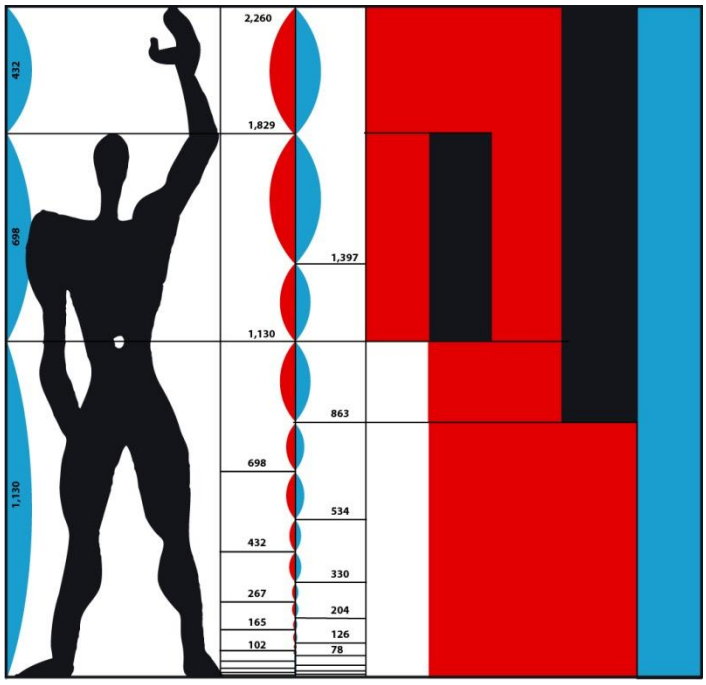
Zajímavě podává roli zlatého řezu v kubistickém umění ruská kubistická malířka Maria Vorobjevová, zvaná Marevna. Ve své knize, kde popisuje životy a díla svých osobních přátel, píše, že Picaso, River a Gris používali zlatý řez jako „jiný způsob rozdělování ploch, který je poněkud složitější a přitahuje obeznámené a zvědavé mysle."

Jedním z největších zastánců využívání zlatého řezu v umění a architektuře byl slavný švýcarsko-francouzský architekt a výtvarník Le Corbusier. Původně měl Le Corbusier k využití zlatého řezu úplně jiný postoj, byl k němu skeptický až negativný, varoval před tím, aby se „mystika vnímání nenahrazovala zlatým řezem". Důkladná analýza Le Corbusierových architektonických návrhů a maleb ukazuje, že umělec před rokem 1927 zlatý řez nikdy nepoužil. Po vydání Ghykovy vlivné knihy *Estetika proporcí v přírodě a v umění* se to ale dramaticky změnilo. A ještě po jeho dalším spise *Zlaté číslo, pythagorejské obřady a rytmy ve vývoji západní civilizace* v Corbusierovi pocit mystických aspektů φ ještě zesílil.

Le Corbusierovo úsilí o nalezení standardizované proporce vyvrcholilo zavedením nového poměrového systému, takzvaného „*Moduloru*". *Modulor* měl podávat „harmonické měřítko lidské míry, které by se dalo všeobecně aplikovat na architekturu i mechaniku". Měl objevit proporční systém rovnocenný přírodnímu tvoření, založen na lidských proporcích. *Modulor* je tvořený mužem, který je vsazen do čtverce a v jehož proporcích se mnohokrát objevuje zlatý řez a Fibonacciho posloupnost.

Le Corbusier prohlašoval, že *Modulor* zajistí vyvážené proporce všemu, od velikosti skříněk a klik od dveří až po celé stavby a městská prostranství. *Modulor* měl dodat světu model standardizace.

Le Corbusier uplatnil svou teorii *Moduloru* v praxi u řady svých projektů.

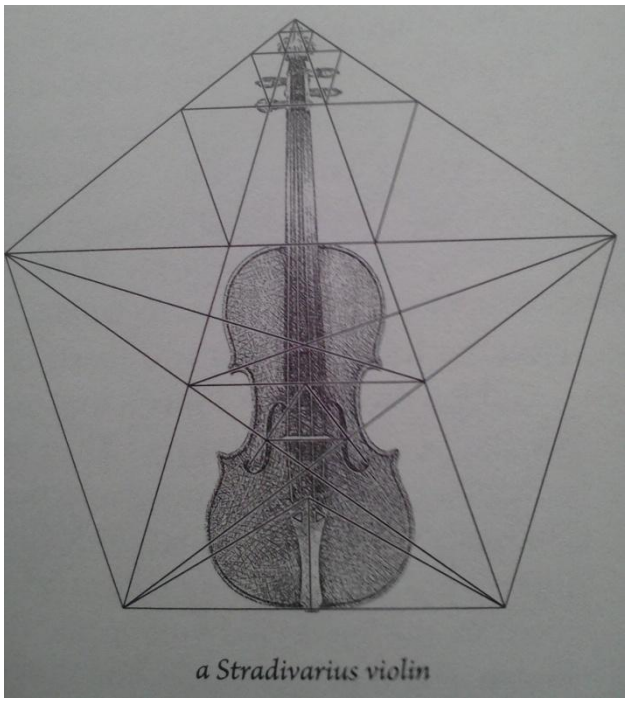


Obr. 34: Modulor

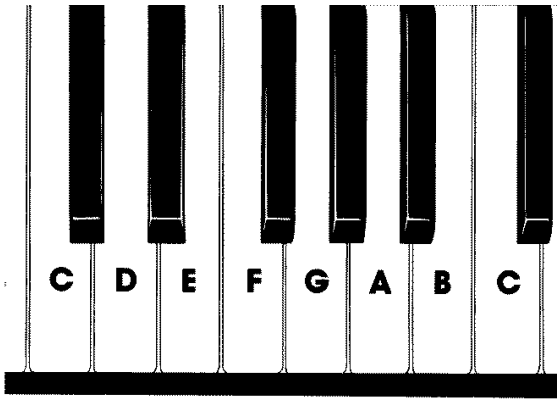
4.2 Hudba

Nástrojem, v kterém sehrál zlatý řez významnou roli, jsou především housle. Ozvučné tělo houslí je obvykle na každé straně ohraničeno dvanácti nebo více zakřivenými oblouky. Střed, z něhož je opsán plochý oblouk v dolní části houslí, často bývá v místě, kde má středová čára nástroje zlatý řez.

Asi nejproslavenější housle vyráběl Antonio Stradivari z italské Cremony. Podle originálních náčrtů je vidět, že Stradivari velmi dbal, aby „oka“ otvorů tvaru „f“ byla geometricky na místech určených zlatým řezem.



Obr. 35: Stradivari housle



Obr. 36: piano

Dalším nástrojem, který souvisí se zlatým řezem, konkrétně s Fibonacciho čísly, je piáno. Oktáva na pianové klávesnici se skládá ze 13 kláves, osmi bílých a pěti černých. Pět černých je pak uspořádáno do dvou skupin po dvou a třech. Čísla 2,3,5,8 a 13 jsou shodou okolností následnými Fibonacciho čísly.

Tak jak dává zlatý řez vizuálnímu umění zvláštní vizuální kvality, jsou tomu samému číslu připisovány obzvláště působivé účinky v hudbě. Například velmi často jsou intervaly malá a velká sexta považované za nejpříjemnější hudební intervaly a samozřejmě tyto intervaly souvisejí se zlatým řezem. Čistý hudební tón je charakteristický stálou frekvencí a stálou amplitudou. Pro ladění se standardně používá tón A, který má frekvenci 440. Velkou sextu lze získat například z tónu A a C, z nichž druhý vzniká při frekvenci asi 264 kmitů za sekundu. Poměr těchto dvou frekvencí je tím pádem 440/264, po úpravě 5/3, což je poměr dvou Fibonacciho čísel. Malou sextu získáme například z vysokého C (frekvence 528)

a E (frekvence 330). V tomto případě je poměr 528/330, po úpravě 8/5, tedy opět dvě následná Fibonacciho čísla s poměrem velmi blízkým zlatému řezu.

Jinou cestou jakou by mohl zlatý řez přispět k uspokojení z hudební skladby, je koncept proporční vyváženosti. Nadšenci zlatého řezu podrobili mnohé hudební kompozice zkoumaní a hledání zlatého řezu. Výsledky byly velmi podobné, vedle několika skutečných využití zlatého řezu jako proporčního systému se objevilo i množství mylných představ.

Paul Larson přišel s objevem, že našel zlatý poměr v nejranějších záznamech západní hudby, a to v liturgických zpěvech *Kyrie* ze souboru gregoriánských chorálů zvaného Liber Usualis. Třicet chorálů se sbírky, je časově rozprostřených od 10. století přes více než šest dalších století. Larson tvrdil, že po rozdělení skladby zlatým řezem nalezl významný „předěl" u 105 ze 146 částí Kyrií, které analyzoval. Vzhledem k absenci jakéhokoli doloženého historického nebo jinak přesvědčivého odůvodnění jde jen o další žonglování s čísly.

Matematik John F. Putz v roce 1995 zkoumal, zda Mozart použil zlatý řez ve 29 větách svých klavírních sonát, skládajících se ze dvou rozdílných částí. V expozici se předvede hudební motiv, který se pak dále rozvíjí a pozměněný opakuje v provedení a repríze. Putz prověřoval poměry počtů taktů v obou částech sonát. Před Putzovým výzkumem několika článků tvrdilo, že Mozartovy klavírní sonáty zlatý řez opravdu obsahují. První výsledky Putzova výzkumu vypadaly velmi slibně. Například první věta *Sonáty č. 1 C dur* sestává z 62 taktů v provedení a repríze a z 38 taktů v expozici. Poměr 62/32 = 1,63 je velmi blízko zlatému řezu. Po podrobnějším prozkoumání Mozartových sonát došel k názoru, že zlatý řez v sonátách pravděpodobně nevyužíval. Z toho plyne, že Mozartova hudba zřejmě „božskou proporci" neobsahuje.

Dalším skladatelem, který zlatý řez možná široce využíval, byl maďarský skladatel Béla Bartók. Maďarský muzikolog Ernö Lendvai Bertókovou hudbu pečlivě zkoumal. Dospěl k názoru, že hlavním rysem jeho chromatické techniky je sledování zákonů zlatého řezu v každé větě jeho díla. Podle Lengvaie podává vynikající příklad Bartókova využívání zlatého řezu jeho nakládání s rytmem a takty. Analýzou fugové věty Bartókovy *Hudby pro smyčce, bicí a celestu* Landvai například ukazuje, že 89 taktů věty je rozděleno do dvou částí s 55 a 34 takty a předělem je nejhlasitější moment skladby. Další rozdělení vznikají umísťováním a odstraňováním dusítek. Všechny takto rozdělené počty taktu jsou Fibonacciho čísly a poměry mezi hlavními částmi jsou tedy blízko zlatému řezu. Někteří muzikologové jak to už bývá, ale Lendvaiovy analýzy nepřijímají. Takže zase se můžeme o použití zlatého řezu jen dohadovat.

Skladatelem, u kterého už z určitostí víme, že se v jeho skladbách zlatý řez nachází, byl skladatel Claude Debussy. Roy Howat tvrdí, že se zlatý řez nachází u řady jeho kompozic. Například v klavírní skladbě *Reflets dans l'eau*, se repríza prvního ronda objevuje po 34 taktech, což je v bodě zlatého řezu mezi začátkem skladby a nástupem její vrcholné části po 55. taktu. Čísla 34 i 55 jsou samozřejmě Fibonacciho čísly a poměr 34/21 se již uspokojivě přibližuje zlatému řezu. Podobná struktura se opakuje i ve druhé části. Claude Debussy tedy určitě zlatý řez ve své tvorbě využíval, ale nebyl asi hlavním zdrojem jeho kreativity.

Skladatel a matematik Joseph Schillinger vypracoval systém hudební skladby, v němž po sobě jdoucí noty melodie při počítání podle půltónů sledovaly Fibonacciho intervaly. Pro Schillingera tyto Fibonacciho notové skoky vyjadřovali stejný pocit harmonie, jaký botanik prožívá u fylotaktických poměrů listů na stonku.

Na závěr můžeme konstatovat, že ne všechna tvrzení o přítomnosti zlatého řezu u skladatelů jsou pravdivá, ale určitě můžeme říci, že se zvláště ve 20. století v hudbě projevil obnovený zájem o využití čísel. A u některých skladatelů se začal objevovat i zlatý řez.

Závěr

Všechny pokusy odhalit zlatý řez v rozmanitých dílech výtvarného umění, nebo i hudby spočívají na předpokladu, že existuje ideální krása, kterou je možné uplatňovat v praxi.

Někteří z řady umělců, kteří tvořili díla trvalé hodnoty, se chtěli osvobozovat od pevně dané estetické normy, některé zase zlatý řez uchvátil natolik, že mu věnovali podstatnou část svého života, aby odhalili jeho mystickou krásu.

I v současnosti využívají zlatý řez například architekti, designéři, malíři nebo fotografové (někdy i neúmyslně).

Závěrem můžeme zkonstatovat, že zlatý řez je výtvorem hlavně geometrie jakožto lidského vynálezu. Kdyby geometrie nebyla vůbec vymyšlena, pak bychom o zlatém řezu asi nikdy nevěděli. Ovšem kdo ví? Všechno je to tajemství přírody. Zlatý řez je vetkán do samé struktury naší existence a naší povinností je proměňovat a přetvářet svět do nebeského stavu krásy a do souladu a rovnováhy, v němž měl vždy být.

I pro mě zpracování tématu zlatého řezu znamenalo objevení jednoho z tajemství přírody. I když mě práce stála mnoho úsilí a času, vůbec nelituji, že jsem si zvolil právě toto téma. Bylo pro mě obohacující a fascinující…

Seznam literatury

Livio, M.: Zlatý řez. Praha: Dokořán a Argo, 2006.
Olsen, S.: Záhadný zlatý řez. Praha: Dokořán, 2009.

Internetové zdroje

http://www.bonsajacaj.sk/cl_skol1.htm (3. 1. 2014)
http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1491-leonardo-z-pisy-fibonacci (3. 1. 2014)
http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/chmelikovabp/Zlaty_rez.pdf (3. 1. 2014)
http://www.marypedia.atknet.sk/praca.php (20. 1. 2014)
http://mathworld.ic.cz/pdf/zlaty-rez-v-matematice-i-mimo-ni.pdf (20. 1. 2014)
http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka.html (3. 1. 2014)
http://pupa.6f.sk/studenti/zlatyrez.pdf (3. 1. 2014)
http://voho.cz/wiki/matematika/zlaty-rez/ (20. 1. 2014)

Obrázky

Obr. 1: http://plus.maths.org/issue22/features/golden/fig1.gif (3. 1. 2014)
Obr. 2: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka3.html (3. 1. 2014)
Obr. 3: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka3.html (3. 1. 2014)
Obr. 4: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka3.html (3. 1. 2014)
Obr. 5: http://www.clintnmary.org/images/GoldenRec5.jpg (3. 1. 2014)
Obr. 6: http://goldenratiomyth.weebly.com/uploads/4/0/7/7/4077600/8696989_orig.jpg (3. 1. 2014)
Obr. 7: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka3.html (3. 1. 2014)
Obr. 8: http://www.formyschoolstuff.com/school/math/glossary/images/spiral2.gif (3. 1. 2014)
Obr. 9: http://www.janmaris.nl/sqrphi/phi_rectangle_spiral.gif (3. 1. 2014)
Obr. 10: http://www.realscience.us/blog/wp-content/uploads/2012/05/GoldenSpiral-e1336070444459.gif (3. 1. 2014)
Obr. 11: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b6/Pentagono_con_triangolo_aureo.svg/568px-Pentagono_con_triangolo_aureo.svg.png (5. 1. 2014)

Obr. 12: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka3.html (5. 1. 2014)
Obr. 13: https://githubcamo.global.ssl.fastly.net/552380f1f0eee86666d2c66dff8f4a49d4ff70a9/687474703a2f2f6933362e74696e797069632e636f6d2f667964306d672e6a7067 (5. 1. 2014)
Obr. 14: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka4.html (5. 1. 2014)
Obr. 15: http://faculty.philosophy.umd.edu/jhbrown/beautyII/332-58b.jpg (5. 1. 2014)
Obr. 16: http://faculty.philosophy.umd.edu/jhbrown/beautyII/332-58b.jpg (5. 1. 2014)
Obr. 17: http://files.sarka-pribylova.webnode.cz/200000193-e18abe2849/kompo_kralici.jpg (5. 1. 2014)
Obr. 18: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka4.html (3. 2. 2014)
Obr. 19: http://fyzika.jreichl.com/data/dejiny/stredovek/image113.jpg (3. 2. 2014)
Obr. 20: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka4.html (3. 2. 2014)
Obr. 21: http://richworks.in/wp-content/uploads/2011/02/sun.jpg (3. 2. 2014)
Obr. 22: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka6.html (17. 2. 2014)
Obr. 23: http://mujweb.cz/zlaty.rez/diplomka6.html (17. 2. 2014)
Obr. 24: http://goldenratiomyth.weebly.com/uploads/4/0/7/7/4077600/6816107_orig.jpg?234 (17. 2. 2014)
Obr. 25: http://www.redorbit.com/media/uploads/2013/04/SpiralGalaxy_040313-617x416.jpg (17. 2. 2014)
Obr. 26: http://www.istina-fi.ryazan.ru/images/fig2.jpg (17. 2. 2014)
Obr. 27: http://employees.oneonta.edu/farberas/arth/Images/ARTH213images/Giotto_Ognissanti/Giotto_Ognissanti.jpg (17. 2. 2014)
Obr. 28: http://library.thinkquest.org/trio/TTQ05063/monalisa.gif (17. 2. 2014)
Obr. 29: http://www.abc-people.com/data/leonardov/021.jpg (20. 2. 2014)
Obr. 30: http://astrollogie.net/mystika/svjeronym.jpg (20. 2. 2014)
Obr. 31: http://www.ikono.org/cappelli/site/wp-content/uploads/13_1456_HD-1024x576.jpg (20. 2. 2014)
Obr. 32: http://jchatoff.files.wordpress.com/2011/12/georges_seurat_066.jpg (20. 2. 2014)
Obr. 33: http://dyn1.heritagestatic.com/lf?set=path[7%2F7%2F9%2F779068]%2Csizedata[450x2000]&call=url[file%3Aproduct.chain (20. 2. 2014)
Obr. 34: http://www.neermanfernand.com/images/corbu.jpg (20. 2. 2014)
Obr. 35: http://www.neermanfernand.com/images/corbu.jpg (20. 2. 2014)
Obr. 36: http://www.playpiano.com/wordstowritearticlesfor/keyboard.gif (20. 2. 2014)

[i] Livio, M.: Zlatý řez. Praha: Dokořán a Argo, 2006, str. 11
[ii] Tamtéž, str. 106, str. 107, str. 108
[iii] Tamtéž, str. 109
[iv] Tamtéž, str. 74
[v] Tamtéž, str. 64, str. 65
[vi] Tamtéž, str. 88, str. 89